Exercice 1:

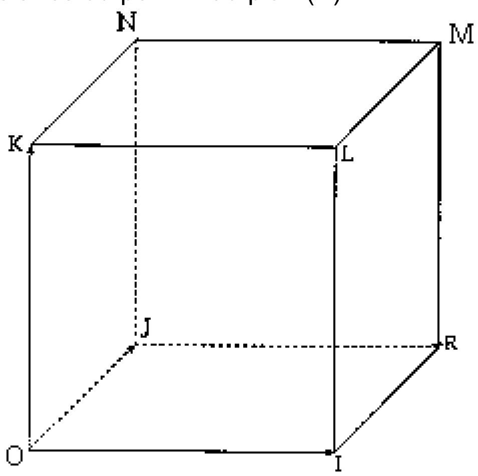
L'espace est rapporté à un repère orthonormal de sens direct $(O\ ;\ \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$.
On considère le cube de sommets O, I, R, J, N, K, L, M. La figure ci-dessous représente ce cube.

On note A le milieu de [I L] et B le point défini par : $\overrightarrow{KB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KN}$.
On appelle (P) le plan passant par les points O, A et B.

1. a: Déterminez les coordonnées des points A et B.
   b: Déterminez les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$
   c: Montrez alors que l'aire du triangle OAB est : $\frac{\sqrt{14}}{6}$.

2. Le point $C(1, \frac{1}{3}, 1)$ appartient-il à (P) ?
   Justifiez votre réponse.

3. On considère le tétraèdre OABK.
   a: Montrez que le volume de ce tétraèdre est : $\frac{1}{9}$.
   b: Calculez alors la distance du point K au plan (P).



CORRECTION

1. a: A (1 ; 0 ; ½) et B(0 ; 2/3 ; 1).
   b: $\vec{u}(-\frac{1}{3}\ ;\ -1\ ;\frac{2}{3})$.
   c: On sait que l'aire du triangle OAB est égal à $\frac{1}{2}\ ||\ \overrightarrow{OA}\ \}\ \wedge\ \overrightarrow{OB}|| = \frac{1}{2}||\vec{u}||$.
   D'où, en utilisant le résultat de la question précédente :
   $$\text{Aire}(OAB) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9} + 1\,\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{6}$$

2. Le plan (P) admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{u}(-\frac{1}{3}\ ;\ -1\ ;\frac{2}{3})$.
   Donc, M appartient à (P) si et seulement si $\overrightarrow{OM}\cdot(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OM}\cdot\vec{u} = 0$.
   On en déduit qu'une équation cartésienne de (P) est :
   (P) : $x + 3y - 2z = 0$.
   On vérifie alors que le point C appartient bien à (P).

3. a: On sait que le volume d'un tétraèdre est ABCD égal à :

$$\left[\text{Volume} = \frac{1}{3} \times \text{Aire(ABC)} \times \text{DH}\right]$$

où $\text{H} = \text{projeté orthogonal de D sur le plan (ABC)}$

Pour le tétraèdre OABK , si H est le projeté orthogonal de A sur le plan (OBK), alors

AH = LK = 1.

De plus, le triangle (OBK) est rectangle en K.

Son aire est : (1 / 3).

Donc:

$$\text{Volume de OABK} = \frac{1}{9}$$

b: Si H ' est le projeté orthogonal de K sur le plan (OAB), on a aussi:

$$\text{Volume de OABK} = \frac{1}{3} \times \text{Aire(OAB)} \times \text{KH}'$$

On connait l'aire du triangle OAB. On en déduit alors que:

$\text{KH}' = \dfrac{\sqrt{14}}{7}$. C'est la distance du point K au plan (P)

Exercice 2: National Septembre 98

Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal direct de l'espace (E).
On considère les quatre points A, B, C et I de coordonnées respectives:
A(-1 ; 2 ; 1) B(1 ; -6 ; -1) C(2 ; 2 ; 2) I(0 ; 1 ; -1).

1. a: Calculez le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
   b: Déterminez une équation cartésienne du plan (P) contenant les trois points A, B et C.

2. Soit (Q) le plan d'équation : $x + y - 3z + 2 = 0$ et (Q ') le plan de repère $(O ; \vec{i}, \vec{k})$.
   a: Pourquoi les plans (Q) et (Q ') sont-ils sécants ?
   b: Donnez un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d'intersection (D) des plans (Q) et (Q ').

3. Donnez une équation cartésienne de la sphère (S) de centre I et de rayon 2.

4. On considère les points J et K de coordonnées respectives :
   J(-2 ; 0 ; 0) K(1 ; 0 ; 1)
   Déterminez l'intersection de la sphère (S) et de la droite (JK)

ORRECTION

1. a: Simple calcul en revenant aux coordonnées des vecteurs:
   $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-8 ; -8 ; 24)$.
   b: Le plan (P) admet le vecteur précédent comme vecteur normal. On obtient alors:
   (P) : $x + y - 3z + 2 = 0$.

2. a: Deux plans sont sécants dans l'espace si leurs vecteurs normaux respectifs ne sont pas
   colinéaires. Or, un vecteur normal du plan (Q ') est le vecteur $\vec{j}$.
   On connait un vecteur normal au plan (Q). Voir la question précédente.
   On vérifie alors que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et on a la conclusion.

   b: Une équation cartésienne de (Q ') est : $y = 0$.
   Le point E de coordonnées (-2 ; 0 ; 0) appartient alors aux plans (Q) et (Q ').
   De plus, le vecteur $\vec{u}(3;0;1)$ est orthogonal aux vecteurs normaux des plans (Q) et (Q ').
   C'est donc un vecteur directeur de la droite (D) intersection de ces deux plans.
3. Equation cartésienne de S:
   S : $x^2 + (y -1)^2 + (z +1)^2 = 4$.

4. La droite (JK) est l'ensemble des points M(x ; y ; z) vérifiant:
   " Il existe $\alpha \in$ IR tel que $\overrightarrow{JM} = \alpha\overrightarrow{JK}$ "
   En utilisant les coordonnées des points, cela donne:
   $$\text{Il existe } \alpha \in \text{IR tel que : } \begin{cases} x = 3\alpha - 2 \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$$
   Le point M appartient donc à S et à la droite (JK) si et seulement si il existe α réel tel que:
   $$\begin{cases} x = 3\alpha - 2 \\ y = 0 \\ z = \alpha \\ x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4 \end{cases} \quad \text{ce qui conduit à : } (3\alpha - 2)^2 + 1 + (\alpha + 1)^2 = 4$$
   On détermine alors les racines de cette équation du second degré, ce qui permet de calculer les coordonnées des deux points d'intersection de S et (JK)