Terminale S

Probabilités — Exercices corrigés

1. Combinatoire avec démonstration

1. **Démonstration de cours**. Démontrer que, pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \le k < n$, on a :

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}.$$

2. En déduire que pour tous entiers naturels n et k tels que $2 \le k < n-1$, on a :

$$\binom{n-2}{k-2}+2\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k}=\binom{n}{k}.$$

3. On considère deux entiers naturels n et k tels que $2 \le k < n-1$. On dispose d'une urne contenant n boules indiscernables au toucher. Deux des boules sont rouges, les autres sont blanches.

On tire au hasard et simultanément k boules de l'urne. On appelle A l'évènement « au moins une boule rouge a été tirée ».

a. Exprimer en fonction de n et de k la probabilité de l'évènement $\overline{\mathrm{A}}$, contraire de A. En déduire la probabilité de A.

b. Exprimer d'une autre manière la probabilité de l'évènement A et montrer, à l'aide de la formule obtenue à la question 2, que l'on retrouve le même résultat.

Correction

1. Démonstration : il est plus simple d'utiliser $\binom{n}{k}=\dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k(k-1)...2.1}$ que $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, la mise au même dénominateur étant plus visible.

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k} \Leftrightarrow \frac{(n-1)...(n-1-k+1+1)}{(k-1)...2.1}+\frac{(n-1)...(n-1-k+1)}{k(k-1)...2.1}=\frac{n...(n-k+1)}{k(k-1)...2.1};$$

le dénominateur commun apparaît alors : $k!$

Il suffit donc de multiplier la première fraction par k en haut et en bas, ce qui donne

$$\frac{k(n-1)...(n-k+1)+(n-1)...(n-k)}{k!}=\frac{n...(n-k+1)}{k!}.$$

On peut mettre $(n-1)...(n-k+1)$ en facteur du numérateur de la fraction de gauche :

$$\frac{(n-1)...(n-k+1)\left[\cancel{k}+n-\cancel{k}\right]}{k!}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$$

et c'est fini.

2. Réécrivons $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$ un rang plus bas pour n et pour k : $\binom{n-2}{k-2}+\binom{n-2}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}$; réécrivons $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$ un rang plus bas pour n mais pas pour k : $\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k}=\binom{n-1}{k}$;

ajoutons les deux lignes : $\binom{n-2}{k-2}+2\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$.

3. Dans l'urne on a 2 boules rouges et $n-2$ boules blanches ; il y a $\binom{n}{k}$ tirages simultanés possibles de k boules de l'urne.

a. A = « au moins une boule rouge a été tirée » ; $\bar{A}$ = « aucune boule rouge n'a été tirée » = « les k boules tirées sont blanches » : il y a $\binom{n-2}{k}$ manières de faire et $P(\bar{A})=\frac{\binom{n-2}{k}}{\binom{n}{k}}$.

On a donc $P(A)=1-\frac{\binom{n-2}{k}}{\binom{n}{k}}=\frac{\binom{n}{k}-\binom{n-2}{k}}{\binom{n}{k}}$.

b. A peut se produire si on tire 1 rouge et $k-1$ blanches, nombre de manières : $\binom{2}{1}\binom{n-2}{k-1}=2\binom{n-2}{k-1}$, ou 2 rouges et $k-2$ blanches : nombre de manières : $\binom{2}{2}\binom{n-2}{k-2}=\binom{n-2}{k-2}$.

On a alors $P(A)=\frac{2\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}}$. L'égalité entre les deux est alors l'égalité des numérateurs :

$$\binom{n}{k}-\binom{n-2}{k}=2\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k-2}\Leftrightarrow\binom{n}{k}=\binom{n-2}{k}+2\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k-2},$$

soit l'égalité du 2.

2. Rangements

On constitue une file d'attente en attribuant au hasard des numéros d'ordre à n personnes ($n \geq 2$). Deux amis A et B se trouvent dans cette file d'attente.

1. Quelle est la probabilité que les deux amis soient situés l'un derrière l'autre ?

2. Quelle est la probabilité que les deux amis soient distants de r places (i.e. séparés par $r-1$ personnes) ?

Correction

Le nombre total de possibilités de rangement est $n!$

1. Supposons que A est en premier, B est derrière, il reste $(n-2)!$ répartitions possibles. Comme A peut être placé n'importe où dans la file avec B derrière lui, il y a $(n-1)$ places possibles pour A et donc la probabilité $\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$ d'avoir A suivi de B ; c'est pareil pour B suivi de A, soit la probabilité finale $\frac{2}{n}$.

2. Même raisonnement ; au pire B est en dernier et A r places devant ; on peut placer A de $n-r$ manières, la probabilité finale est alors $2\frac{(n-r)(n-2)!}{n!}=\frac{2(n-r)}{n(n-1)}$.

3. Calcul d'événements 1

Soient A et B deux événements tels que $P(A)=\frac{1}{5}$ et $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

1. Supposons que A et B soient incompatibles. Calculer $P(B)$.

2. Supposons que A et B soient indépendants. Calculer $P(B)$.

3. Calculer $P(B)$ en supposant que l'événement A ne peut être réalisé que si l'événement B est réalisé.

Correction

1. A et B incompatibles donc $A\cap B=\varnothing$ d'où $P(A\cup B)=P(A)+P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$.

2. A et B indépendants : $P(A\cap B)=P(A)P(B)\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{5}+P(B)-\frac{1}{5}P(B)\Rightarrow \frac{4}{5}P(B)=\frac{3}{10}\Rightarrow P(B)=\frac{3}{8}$.

3. A ne peut être réalisé que si B est réalisé : tous les événements de A sont dans B,

$$P(A\cap B)=P(A)\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{5}+P(B)-\frac{1}{5}\Rightarrow P(B)=\frac{1}{2}.$$

4. Calcul d'événements 2

1. Montrer que, pour 3 événements quelconques A, B, C, on a :

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C).$$

2. Généraliser dans le cas de n événements $A_1, A_2, ..., A_n$.

Correction

1. On prend par exemple $B\cup C=E$, soit $P(A\cup E)=P(A)+P(E)-P(A\cap E)$,

$P(E)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)$ et

$$A\cap E=(A\cap B)\cup(A\cap C)\Rightarrow P(A\cap E)=P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap A\cap C)$$
$$=P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)$$

donc en remplaçant on obtient la formule.

2. Même chose, par récurrence (bof… et très pénible).

5. Calcul d'événements 3

Soient A, B et C des événements. On pose $E_1=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ et $E_2=A\cap(B\cup C)$.

1. Montrer que E_1 et E_2 sont incompatibles.

2. Déterminer l'ensemble $E_1\cup E_2$.

3. On sait que $P(A)=0,6$, $P(B)=0,4$, $P(C)=0,3$, $P(B\cap C)=0,1$, $P(A\cap C)=0,1$, $P(A\cap B)=0,2$ et $P(A\cap B\cap C)=0,05$. Calculer $P(E_1)$ et $P(E_2)$.

Correction

1. $E_1\cap E_2=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap A\cap(B\cup C)=\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap B\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap C\right)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$.

2. $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}=A\cap\left(\overline{B\cup C}\right)$ donc en appelant $K=B\cup C$, on a $E_1\cup E_2=\left(A\cap\overline{K}\right)\cup(A\cap K)=A$.

3. On calcule $P(B\cup C)=0,4+0,3-0,1=0,6$, $P\left(\overline{B\cup C}\right)=0,4$; $P(E_1)+P(E_2)=P(A)=0,6$.

En utilisant la formule de l'exo 9, on a

$P(A\cup K)=P(A\cup B\cup C)=0,6+0,4+0,3-0,1-0,1-0,2+0,05=0,95$; par ailleurs

$P(A\cup K)=P(A)+P(K)-P(A\cap K)\Rightarrow 0,95=0,6+0,6-P(E_2)\Rightarrow P(E_2)=0,25$

et enfin $P(E_1)=0,6-0,25=0,35$.

6. Dés pipés

On lance deux fois un dé pipé tel que P(1)=P(3)=P(4)=1/2 et P(2)=P(6)=1/4. Quelle est la probabilité que la somme des points obtenus soit supérieure à 10 (strictement) sachant que :

1. un des résultats est 6.
2. le premier résultat est 6.

Correction

Il manque $P(5)=1-3\times\frac{1}{8}-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$.

1. Il faut avoir des résultats comme (x, 6) ou (6, x) avec x = 5 ou 6 ; on a donc la probabilité $2\times\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ (on enlève 1/4 pour ne pas compter (6, 6) deux fois).

2. Là c'est simplement (6, x), soit $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$.

7. Pièces d'or

Trois coffres notés C_1, C_2, C_3 ont chacun deux tiroirs, et dans chaque tiroir, il y a une pièce. Le coffre C_1 contient 2 pièces d'or, C_2 2 pièces d'argent et C_3 une pièce d'or et une d'argent.

1. On ouvre au hasard l'un des 6 tiroirs et on trouve une pièce d'argent. Quelle est la probabilité pour que l'on ait ouvert un tiroir du coffre C_2 ?
2. On ouvre à nouveau et indépendamment de la première fois l'un des 6 tiroirs et on trouve encore une pièce d'argent. Quelle est la probabilité pour que l'on ait ouvert deux fois le même coffre ?

Correction

1. $P(A)=P_{C_1}(A)\times P(C_1)+P_{C_2}(A)\times P(C_2)+P_{C_3}(A)\times P(C_3)=0+1\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$;

$$P_A(C_2)=\frac{P(A\cap C_2)}{P(A)}=\frac{P_{C_2}(A)\times P(C_2)}{P(A)}=\frac{1/3}{1/2}=\frac{2}{3}$$ (ce qui était totalement évident…)

2. Puisqu'on a déjà pris une pièce d'argent, il faut retomber sur C_2, donc $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ (attention à l'indépendance, sinon on aurait quelque chose plus compliqué).

8. Fesic 2001 : Exercice 17

On considère une succession de sacs qu'on désigne par S_1, S_2, … , S_n …

Au départ le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 jeton blanc ; tous les autres sacs contiennent chacun 1 jeton noir et 1 jeton blanc.

On tire au hasard un jeton du sac S_1 que l'on place dans le sac S_2 . Puis, on tire au hasard un jeton du sac S_2, que l'on place dans le sac S_3 , et ainsi de suite.

On note B_k l'événement : « le jeton tiré du sac S_k est blanc », et $p_k = P(B_k)$ sa probabilité.

a. On a : $P(B_2 / B_1) = \frac{2}{3}$ et $P\left(B_2 / \overline{B_1}\right) = \frac{1}{3}$.

b. On a, pour tout entier $n \geq 1$: $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $q_n = p_n - \frac{1}{2}$.

c. Alors la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique.

d. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

Correction

a. **Vrai :** Si on tire un jeton blanc de S_1, on en a 2 dans S_2 pour un total de 3 jetons dans S_2, donc $P(B_2 / B_1) = \frac{2}{3}$. Si on tire un jeton noir de S_1, on a 1 jeton blanc dans S_2, et 3 jetons dans S_2, donc $P\left(B_2 / \overline{B}_1\right) = \frac{1}{3}$.

b. **Faux** : Le raisonnement fait en a. reste le même si on est au tirage n : $P(B_{n+1} / B_n) = \frac{2}{3}$ et $P\left(B_{n+1} / \overline{B}_n\right) = \frac{1}{3}$ d'autre part $p_{n+1} = P(B_{n+1})$ donc $p_{n+1} = P(B_{n+1} / B_n).P(B_n) + P\left(B_{n+1} / \overline{B}_n\right).P(\overline{B}_n)$ soit $p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}(1-p_n)$ d'où $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}$.

c. **Faux** : On remplace dans la relation de récurrence qui définit p_n : $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}$, $q_{n+1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow q_{n+1} = \frac{1}{3}q_n$ donc q_n est géométrique.

Comme $p_1 = \frac{1}{3}$, on a $q_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$ d'où $q_n = -\frac{1}{6}.\frac{1}{3^{n-1}} = -\frac{1}{2}.\frac{1}{3^n}$ et finalement $p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{3^n}$ ce qui justifie la réponse d).

d. **Vrai :** La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

9. Fesic 2001 : Exercice 18

Une urne contient trois dés équilibrés. Deux d'entre eux sont normaux : ils possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est truqué : il possède deux faces numérotées 1 et quatre faces portant le numéro 6.

On prend un dé au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de celui-ci. On note :

* N l'événement : « le dé tiré est normal » ;
* U l'événement : « on obtient 1 au premier lancer » ;
* pour n entier non nul, S_n l'événement : « on obtient 6 à chacun des n premiers lancers ».

a. On a : $P(U) = \frac{2}{9}$.

b. Pour tout entier n non nul, on a : $\mathrm{P}(S_n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Pour n entier non nul, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé truqué, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n premiers lancers.

c. Pour tout entier n non nul, on a : $p_n = \dfrac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$.

d. On a : $\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$.

Correction

a. **Vrai :** On trouve facilement $P(N) = \frac{2}{3}$, $P(U/N) = \frac{1}{6}$ et $P(U/\bar{N}) = \frac{2}{6}$. Reprenons les probabilités totales : $P(U) = P(U/N).P(N) + P(U/\bar{N}).P(\bar{N}) = \frac{1}{6}.\frac{2}{3} + \frac{2}{6}.\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

b. **Vrai :** épreuves indépendantes répétées donc loi binomiale : les paramètres sont n pour le nombre de tirages et p :

* si on choisit un dé normal $p = \frac{1}{6}$, on a alors P (tirer 6 n fois)$= \mathrm{C}_n^n p^n (1-p)^0 = \left(\frac{1}{6}\right)^n$;

* si on choisit le dé truqué $p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, on a alors P (tirer 6 n fois)$= \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

En refaisant le même raisonnement qu'au a. on obtient : P (tirer 6 n fois)$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

c. **Vrai :** $p_n = P(\bar{N}/S_n) = \dfrac{P(\bar{N}\cap S_n)}{P(S_n)} = \dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \dfrac{\left(\frac{4}{6}\right)^n}{2\left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{4}{6}\right)^n} = \dfrac{4^n}{2+4^n} = \dfrac{1}{2\frac{1}{4^n}+1}$.

d. **Faux** : p_n tend vers 1 quand n tend vers l'infini, ce qui semble logique.

10. Fesic 2002 : Exercice 15

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient :

- une boule numérotée 0,
- une boule numérotée 1,
- 2^1 boules numérotées 2,
- 2^2 boules numérotées 3,

……………………………….

- 2^{k-1} boules numérotées k (k entier compris entre 1 et n),

……………………………….

- 2^{n-1} boules numérotées n.

Les boules sont indiscernables au toucher. On extrait au hasard une boule de l'urne et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

a. L'urne contient $2^n - 1$ boules.

b. Pour tout entier naturel k tel que $1 \le k \le n$, on a : $P(X = k) = 2^{n-k+1}$.

c. On a pour $n \geq 2$: $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.

d. On a : $E(X) = (n-1)2^n + 1$.

Correction

a. **Faux** : L'urne contient $1 + 1 + 2^1 + \ldots + 2^{k-1} + \ldots + 2^{n-1} = 1 + \frac{2^n - 1}{2-1} = 2^n$ boules (somme des termes d'une suite géométrique).

b. **Faux** : Si $k>0$, $P(X=k) = \frac{2^{k-1}}{2^n} = 2^{k-n-1}$; si $k=0$, $P(X=0) = \frac{1}{2^n} = 2^{-n}$ (la réponse proposée était forcément fausse puisque $2^{n-k+1} > 1$).

c. **Vrai :** On teste la formule pour $n=2$: $\sum_{k=1}^{2} k2^{k-1} = 1.2^0 + 2.2^1 = 5; (2-1)2^2 + 1 = 5$. Récurrence :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} + (n+1)2^n = (n-1)2^n + 1 + (n+1)2^n = 2n2^n + 1 = n2^{n+1} + 1 \text{ ;}$$

remplaçons maintenant n par $n+1$ dans la formule :

$$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k2^{k-1} = (n+1-1)2^{n+1} + 1 = n2^{n+1} + 1 \text{ ; ok.}$$

d. **Faux** : $E(X) = 0.2^{-n} + 1.2^{-n} + 2.2^{-n+1} + \ldots + k.2^{-n+k-1} + \ldots + n.2^{-n+n-1} = 2^{-n}\left(\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1}\right)$ d'où

$E(X) = 2^{-n}\left((n-1)2^n + 1\right) = (n-1) + 2^{-n}$.

11. Fesic 2002 : Exercice 16

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On dispose de deux urnes U et V. L'urne U contient 2 boules blanches et n boules noires ; l'urne V contient n boules blanches et 2 boules noires. On choisit au hasard l'une des deux urnes, puis on tire deux boules de cette urne, successivement et sans remise.

On désigne par U l'événement : « on choisit l'urne U », par V l'événement : « on choisit l'urne V » et par B l'événement : « les deux boules tirées sont blanches ».

a. On a : $\mathrm{P}(B \cap U) = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$.

b. On a : $P(B) = \frac{n^2 - n + 2}{(n+2)(n+1)}$.

c. $P(U/B) = \frac{2}{n^2 - n + 2}$.

d. Pour que $P(U/B) \leq 0,1$, il suffit que $n \geq 4$.

Correction

a. **Faux** : $\mathrm{P}(B \cap U) = P(U \text{ et } 2 \text{ blanches}) = P(B/U).P(U) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{n+2}{2}}\frac{1}{2} = \frac{1}{2\frac{(n+2)(n+1)}{2}} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$.

b. **Faux** : Utilisons les probabilités totales : $P(B) = P(B \cap U) + P(B \cap V) = P(B/U)P(U) + P(B/V)P(V)$.

Or $P(B/V)=\dfrac{\binom{n}{2}}{\binom{n+2}{2}}=\dfrac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)}$, $P(B)=\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{(n+2)(n+1)}+\dfrac{1}{2}\dfrac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)}$, soit $P(B)=\dfrac{n^2-n+2}{2(n+2)(n+1)}$.

c. **Vrai :** $P(U/B)=\dfrac{P(B\cap U)}{P(B)}=\dfrac{\dfrac{2}{2(n+2)(n+1)}}{\dfrac{n^2-n+2}{2(n+2)(n+1)}}=\dfrac{2}{n^2-n+2}$.

d. **Faux** : $P(U/B)\le 0{,}1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{n^2-n+2}\le 0{,}1 \Leftrightarrow n^2-n+2\ge 20 \Leftrightarrow n^2-n-18\ge 0$; $\Delta=1+72$, soit $\sqrt{\Delta}\approx 8{,}5$ d'où $n_1\approx 4{,}75\,;n_2\approx -3{,}75$; le trinôme est positif si $n\ge n_1$, il faut donc que $n\ge 5$. De toutes manières on pouvait tester 4 qui donne $P(U/B)=\dfrac{2}{14}=\dfrac{1}{7}$ qui est trop gros.

12. Fesic 2004 : Exercice 13

Une urne contient 3 boules : une bleue, une verte et une rouge. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise intermédiaire.

On suppose les tirages équiprobables et indépendants et on appelle p la probabilité associée à cette expérience. On définit de plus les événements suivants :

* On appelle A_n l'événement : « Les $n-1$ tirages ont donné la même boule et la $n^{\text{ième}}$ boule tirée est différente des précédentes » ;

* Lorsque k est un entier compris entre 1 et n, on appelle B_k, V_k et R_k les événements respectivement associés au tirage d'une boule bleue, verte ou rouge lors du $k^{\text{ième}}$ tirage.

a. $p(B_1\cap\overline{B}_2)=1-p(V_1\cap\overline{V}_2)-p(R_1\cap\overline{R}_2)$.

b. $p(A_2)=\dfrac{2}{3}$.

c. Pour tout entier $n\ge 2$, on a : $p(A_n)=\dfrac{2}{3^{n-1}}$.

d. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[p(A_2)+p(A_3)+\ldots+p(A_n)\right]=\dfrac{1}{3}$.

Correction

Question	a	b	c	d
Réponse	F	V	V	F

a. $B_1\cap\overline{B}_2$ se traduit par : « tirer une blanche en 1 et tirer une rouge ou une verte en 2 ». Comme les tirages sont indépendants le mieux est encore de faire le calcul : $p(B_k)=\dfrac{1}{3}$, $p(\overline{B}_k)=\dfrac{2}{3}$, et la même chose pour les autres couleurs :

$p(B_1\cap\overline{B}_2)=\dfrac{1}{3}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$, $1-p(V_1\cap\overline{V}_2)-p(R_1\cap\overline{R}_2)=1-\dfrac{2}{9}-\dfrac{2}{9}=\dfrac{9-4}{9}=\dfrac{5}{9}$.

b. A_2 est l'événement « tirer une boule d'une couleur en 1 et d'une couleur différente en 2 », soit $p(A_2)=p(B_1\cap\overline{B}_2)+p(V_1\cap\overline{V}_2)+p(R_1\cap\overline{R}_2)=\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{9}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$.

c. Pour A_n il faut tirer $n-1$ fois la même couleur, soit pour chaque couleur $\frac{1}{3^{n-1}}$ puis tirer une couleur différente, soit $\frac{2}{3}$; comme il y a 3 couleurs, ça nous fait $p(A_n)=3\left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)\frac{2}{3}=\frac{2}{3^{n-1}}$.

d. La somme $p(A_2)+p(A_3)+\ldots+p(A_n)$ est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $p(A_2)=\frac{2}{3}$ et de raison $\frac{1}{3}$ donc elle vaut $\frac{2}{3}\frac{1-\frac{1}{3^{n-1}}}{1-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3^{n-1}}$ (de 2 à n il y a $n-1$ termes) qui tend vers 1 à l'infini. On pouvait s'en douter dans la mesure où on est sûr de finir par tirer une boule de couleur différente…

13. Fesic 2004 : Exercice 14

La durée de vie d'un moteur est de 5 ans et suit une loi exponentielle de paramètre λ. On utilisera pour les calculs $\ln 2\approx 0,7$.

a. La densité de probabilité associée à cette loi est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(t)=0 \text{ si } t\notin[0\,;5] \\ f(t)=5e^{-5t} \text{ si } t\in[0\,;5]\end{cases}$.

b. On suppose que 50% des clients ont été dépannés durant la garantie. La durée de cette garantie est de 3 ans et demi environ.

c. On considère un lot de 10 moteurs fonctionnant de manière indépendante et on appelle X le nombre de moteurs qui n'ont pas de panne pendant les deux premières années.

La probabilité d'avoir $X\geq 1$ est $p(X\geq 1)=e^{-4}$.

d. On est dans les mêmes conditions qu'au c. L'espérance de la variable aléatoire X est $E(X)=10e^{-\frac{2}{5}}$.

<u>Correction</u>

Question	a	b	c	d
Réponse	F	V	F	V

a. La densité de probabilité d'une loi exponentielle de paramètre λ est $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ pour $t\geq 0$ et $f(t)=0$ pour $t<0$. Si on suit le texte alors pour $t>5$ la densité est nulle, soit $\begin{cases} f(t)=0 \text{ si } t\notin[0\,;5] \\ f(t)=\lambda e^{-\lambda t} \text{ si } t\in[0\,;5]\end{cases}$.

Par contre il faut alors que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=1\Leftrightarrow\int_0^5\lambda e^{-\lambda t}dt=1\Leftrightarrow\left[-e^{-\lambda t}\right]_0^5=1\Leftrightarrow 1-e^{-5\lambda}=1$ ce qui est impossible.

En fait l'énoncé est moyennement clair : il faut en fait lire « La durée de vie *moyenne* d'un moteur est de 5 ans » auquel cas on a immédiatement $\frac{1}{\lambda}=5\Leftrightarrow\lambda=0,2$. La densité est alors $\begin{cases} f(t)=0 \text{ si } t<0 \\ f(t)=0,2e^{-0,2t} \text{ si } t\geq 0\end{cases}$.

b. La traduction de l'énoncé est la suivante : on a 50% des moteurs qui vivent plus que T (T est la durée de la garantie) ; si t est la durée de vie d'un moteur, la probabilité qu'il dure après T est $p(t>T)=1-p(t\leq T)=1-\int_0^T 0,2e^{-0,2t}dt=e^{-0,2T}$; on sait que cette probabilité est de 0,5 = 1/2 et on cherche donc T. Il nous faut résoudre $e^{-0,2T}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow -0,2T=\ln(\frac{1}{2})\Leftrightarrow T=\frac{-\ln(2)}{-0,2}\approx 3,5$.

c. La probabilité qu'un moteur ne tombe pas en panne avant deux ans est $p(t>2)=1-p(t\leq 2)=e^{-0,2.2}=e^{-0,4}$ donc X suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=e^{-0,2.2}=e^{-0,4}$.

On a alors $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - \binom{10}{0}(e^{-0,4})^0(1-e^{-0,4})^{10} = 1-(1-e^{-0,4})^{10}$ soit environ 0,999985 (interpréter…).

d. Cours : $E(X) = np = 10e^{-0,4} = 10e^{-\frac{2}{5}}$.

14. Urnes et dés, Pondichery 2004

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes, U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Il y a trois boules noires dans U_1, deux boules noires dans U_2 et une boule noire dans U_3. Toutes les autres boules dans les urnes sont blanches. Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la manière suivante :

le joueur lance le dé,

* s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans U_1 ;

* s'il obtient un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_2, note sa couleur et la remet dans U_2 ;

* si le numéro amené par le dé n'est ni 1 ni un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_3, note sa couleur et la remet dans U_3.

On désigne par A, B, C et N les événements suivants :

A : « Le dé amène le numéro 1 ».

B : « Le dé amène un multiple de 3 ».

C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni 1 ni un multiple de 3 ».

N : « La boule tirée est noire ».

1. Le joueur joue une partie.

a. Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\frac{5}{3k}$.

b. Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

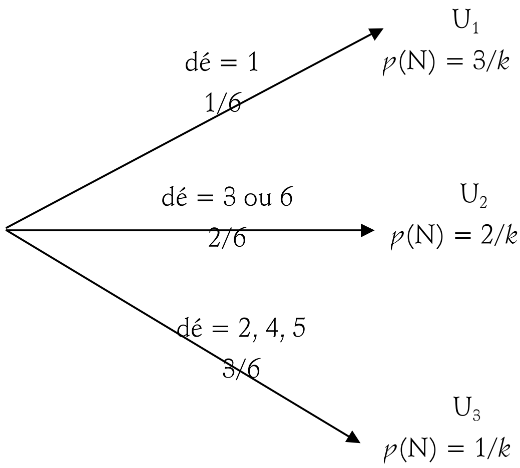
c. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\frac{1}{2}$.

d. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$.

2. Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\frac{1}{30}$. Le joueur fait 20 parties, indépendantes les unes des autres. Calculer, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3} près la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

Correction

On fait un arbre qui donne toutes les réponses immédiatement :



1. a. Pour avoir une boule noire il faut calculer la probabilité d'avoir tiré 1 avec le dé et une noire dans U_1, etc., soit sous forme de probabilité conditionnelle :

$$p(N)=p[(A\cap N)\cup(B\cap N)\cup(C\cap N)]=p(A)p_{U_1}(N)+p(B)p_{U_2}(N)+p(C)p_{U_3}(N).$$

Ceci donne évidemment $p(N)=\frac{1}{6}.\frac{3}{k}+\frac{2}{6}.\frac{2}{k}+\frac{3}{6}.\frac{1}{k}=\frac{10}{6k}=\frac{5}{3k}$.

b. On cherche ici $P_N(dé=1)=\frac{p(A\cap N)}{p(N)}=\frac{1/2k}{5/3k}=\frac{3}{10}$.

c. $\frac{5}{3k}>\frac{1}{2}\Leftrightarrow 3k<10\Leftrightarrow k<\frac{10}{3}$; comme k est entier et supérieur ou égal à 3, il reste $k = 3$.

d. $\frac{5}{3k}=\frac{1}{30}\Leftrightarrow 3k=150\Leftrightarrow k=50$.

2. Le nombre de fois où on tire une boule noire sur les 20 parties suit une Loi binômiale de paramètres $n = 20$ et $p=\frac{1}{30}$.

La probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire est donc

$$p(X\geq 1)=1-p(X=0)=1-\binom{20}{0}\left(\frac{1}{30}\right)^0\left(\frac{29}{30}\right)^{20}=1-\left(\frac{29}{30}\right)^{20}\approx 0,492.$$

15. Entropie, France, sept 2004

5 points

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75 % de particules A et 25 % de particules B. Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments K1 et K2. L'expérience est modélisée de la manière suivante :

- Une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et dans K2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

- Une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

Partie A

1. Soit une particule au hasard. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A1 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K1 » ;

A2 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K2 » ;

B1 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K1 » ;

B2 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K2 » ;

C1 : « la particule entre dans K1 » ;

C2 : « la particule entre dans K2 ».

2. On procède 5 fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction. Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes. Calculer la probabilité de l'événement E suivant : « il y a exactement deux particules dans K2 ».

Partie B

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B. On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t=0$, on a $p(0)=0,75$.

Plus généralement, si t est exprimé en années, on a $p(t)=0,75e^{-\lambda t}$ où λ est une constante réelle. La demi-vie[1] des particules de type A est égale à 5730 ans.

1. Calculer λ ; on prendra une valeur approchée à 10^{-5} près par défaut.

2. Au bout de combien d'années, 10 % des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?

3. Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

<u>Correction</u>

Partie A

Interprétons les données en termes de probabilités : 75 % de particules A, soit $p(\text{A})=0,75$, et 25 % de particules B, soit $p(\text{B})=0,25$.

- A entre dans K1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$: $p_{\text{A}}(\text{K1})=\frac{1}{3}$, dans K2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$: $p_{\text{A}}(\text{K2})=\frac{2}{3}$.

- B entre dans K1 ou K2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$: $p_{\text{B}}(\text{K1})=\frac{1}{2}$, $p_{\text{B}}(\text{K2})=\frac{1}{2}$.

1. $p(\text{A1})=p(\text{A}\cap\text{K1})=p_{\text{A}}(\text{K1})p(\text{A})=\frac{1}{3}.0,75=\frac{1}{4}$; $p(\text{A2})=p(\text{A}\cap\text{K2})=p_{\text{A}}(\text{K2})p(\text{A})=\frac{2}{3}.0,75=\frac{1}{2}$;

$p(\text{B1})=p(\text{B}\cap\text{K1})=p_{\text{B}}(\text{K1})p(\text{B})=\frac{1}{2}.0,25=\frac{1}{8}$; $p(\text{B2})=p(\text{B}\cap\text{K2})=p_{\text{B}}(\text{K2})p(\text{B})=\frac{1}{2}.0,25=\frac{1}{8}$;

$p(\text{C1})=p((\text{A}\cap\text{K1})\cup(\text{B}\cap\text{K1}))=p(\text{A}\cap\text{K1})+p(\text{B}\cap\text{K1})=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$;

$p(\text{C2})=p((\text{A}\cap\text{K2})\cup(\text{B}\cap\text{K2}))=p(\text{A}\cap\text{K2})+p(\text{B}\cap\text{K2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$.

Le total doit évidemment faire 1…

2. Loi binomiale, $B(5,5/8)$; $p(2\text{ dans K2})=\binom{5}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^2\left(\frac{3}{8}\right)^3\approx 0,206$.

[1] Temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial.

Partie B

$p(t)=0,75e^{-\lambda t}$ où λ est une constante réelle. La demi-vie des particules de type A est égale à 5730 ans.

1. A t = 5730, on a

$0,75e^{-\lambda t}=\frac{1}{2}p(0)\Leftrightarrow 0,75e^{-\lambda(5730)}=\frac{0,75}{2}\Leftrightarrow e^{-\lambda(5730)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\lambda(5730)=-\ln 2\Leftrightarrow \lambda=\frac{\ln 2}{5730}\approx 0,00012097$,

soit 0,00012 à 10^{-5} près par défaut.

2. On cherche t pour qu'il reste 90 % des particules de type A, soit $p(t)=\frac{90}{100}p(0)$, ce qui donne l'équation d'inconnue t : $0,75e^{-\lambda t}=0,9\times 0,75\Leftrightarrow e^{-\lambda t}=0,9\Leftrightarrow -\lambda t=\ln(0,9)\Leftrightarrow t=\frac{\ln(0,9)}{-\lambda}=\frac{\ln(0,9)}{-0,00012}\approx 871$ ans.

3. Il y aura autant de particules de type A que de particules de type B lorsque les pourcentages de types A et B seront de 50 % chacun. En l'occurrence il faut que $p(t)=0,5$, ce qui donne

$$0,75e^{-\lambda t}=0,5\Leftrightarrow e^{-\lambda t}=\frac{0,5}{0,75}\Leftrightarrow -\lambda t=\ln(2/3)\Leftrightarrow t=\frac{\ln(2/3)}{-\lambda}\approx 3352 \text{ ans}.$$

16. Loi exponentielle, France, juin 2004

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle [0 ; +∞ [: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est $p([0\,;t[)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$. Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0\,;200[)=0,5$.

1. Montrer que $\lambda=\frac{\ln 2}{200}$.

2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.

3. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers +∞ de $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}dx$.

a. Montrer que $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}dx=\frac{-\lambda A e^{-\lambda A}-e^{-\lambda A}+1}{\lambda}$.

b. En déduire d_m ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.

<u>Correction</u>

1. $p([0\,;200[)=\int_0^{200}\lambda e^{-\lambda x}dx=\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{200}=-e^{-200\lambda}+1$; il faut donc résoudre

$$1-e^{-200\lambda}=0,5\Leftrightarrow e^{-200\lambda}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow -200\lambda=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2\Leftrightarrow \lambda=\frac{\ln 2}{200}.$$

2. $p([300\,;+\infty[)=1-\int_0^{300}\lambda e^{-\lambda x}dx=1-(-e^{-300\lambda}+1)=e^{-300\frac{\ln 2}{200}}=e^{-\frac{3}{2}\ln 2}=\left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{3}{2}}=2^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\approx 0,35$.

3. On intègre par parties en posant $u=\lambda x$, $v'=e^{-\lambda x}$ d'où $u'=\lambda$ et $v=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$:

$$\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}dx=\left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^A-\int_0^A -e^{-\lambda x}dx=-Ae^{-\lambda A}+0+\left[\frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^A=-Ae^{-\lambda A}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda A}+\frac{1}{\lambda}=\frac{-\lambda Ae^{-\lambda A}-e^{-\lambda A}+1}{\lambda}$$

.

4. L'exponentielle l'emporte sur toute fonction polynôme d'où $Ae^{-\lambda A}$ tend vers 0 lorsque A tend vers $+\infty$. La limite d_m est alors $\frac{1}{\lambda}$ qui est la *moyenne* de la loi exponentielle. Dans l'exemple on a donc $d_m=\frac{200}{\ln 2}\approx 289$ semaines.

17. Boules, Am. du sud, nov 2004

5 points, énoncé légèrement modifié.

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage de deux boules simultanément de l'urne.

On note A_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire » ;

on note A_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire » ;

on note A_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires ».

Montrer que $p(A_0)=\frac{6}{15}$ et $p(A_1)=\frac{8}{15}$; en déduire $p(A_2)$.

2. Après ce premier tirage, il reste 4 boules dans l'urne. On effectue à nouveau un tirage sans remise de deux boules de l'urne.

On note B_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n°2 » ;

on note B_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire au tirage n°2 » ;

on note B_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires au tirage n°2 ».

a. Calculer $p_{A_0}(B_0)$, $p_{A_1}(B_0)$, $p_{A_2}(B_0)$.

b. Calculer $p(B_0)$.

c. Calculer $p(B_1)$ et $p(B_2)$.

d. On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier tirage ?

3. On considère l'événement R : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient tirées de l'urne ». Montrer que $p(R)=\frac{1}{3}$.

<u>Correction</u>

1. On effectue au hasard un tirage de deux boules simultanément de l'urne : il y a $\binom{6}{2}=\frac{6.5}{2}=15$ tirages possibles.

« On n'a obtenu aucune boule noire » revient à dire que l'on a tiré deux rouges parmi 4, il y a $\binom{4}{2}=\frac{4.3}{2}=6$ et la probabilité est $p(A_0)=\frac{6}{15}$;

de même « on a obtenu une seule boule noire » revient à dire qu'on a tiré une noire parmi 2 et une rouge parmi 4, il y a $\binom{2}{1}.\binom{4}{1}=8$ manières de procéder, ce qui donne $p(A_1)=\frac{8}{15}$; comme la seule possibilité restante est de tirer 2 noires, on a $p(A_2)=1-p(\overline{A}_2)=1-\left(\frac{6}{15}+\frac{8}{15}\right)=\frac{1}{15}$.

2. a. Lors de ce deuxième tirage on a $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=6$ tirages possibles.

Si on a tiré 0 noire au 1[er] tirage, on a tiré 2 rouges ; il reste donc 2 rouges et 2 noires dans la boite et la probabilité de tirer 0 noire est celle de tirer 2 rouges parmi 2, soit $p_{A_0}(B_0)=\frac{\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}}{6}=\frac{1}{6}$;

si on a tiré 1 noire au 1[er] tirage, on a tiré également 1 rouge ; il reste donc 3 rouges et 1 noire dans la boite et la probabilité de tirer 0 noire est celle de tirer 2 rouges parmi 3, soit $p_{A_1}(B_0)=\frac{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}}{6}=\frac{3}{6}$;

si on a tiré 2 noires au 1[er] tirage, on a tiré 0 rouge ; il reste donc 4 rouges et 0 noire dans la boite et la probabilité de tirer 0 noire est celle de tirer 2 rouges parmi 4, soit $p_{A_2}(B_0)=\frac{\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}}{6}=\frac{6}{6}=1$ (en fait c'était évident…puisqu'il n'y a plus que des rouges).

b. avec les probabilités totales on a $p(B_0)=p(B_0\cap A_0)+p(B_0\cap A_1)+p(B_0\cap A_2)$, soit

$$p(B_0)=p_{A_0}(B_0)p(A_0)+p_{A_1}(B_0)p(A_1)+p_{A_2}(B_0)p(A_2)=\frac{1}{6}.\frac{6}{15}+\frac{3}{6}.\frac{8}{15}+\frac{6}{6}.\frac{1}{15}=\frac{6}{15}.$$

c. De la même manière on a

$p_{A_0}(B_1)=\frac{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}{6}=\frac{4}{6}$, $p_{A_1}(B_1)=\frac{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}{6}=\frac{3}{6}$, $p_{A_2}(B_1)=0$;

$p(B_1)=p_{A_0}(B_1)p(A_0)+p_{A_1}(B_1)p(A_1)+p_{A_2}(B_1)p(A_2)=\frac{4}{6}.\frac{6}{15}+\frac{3}{6}.\frac{8}{15}+0.\frac{1}{15}=\frac{8}{15}$;

$p_{A_0}(B_2)=\frac{\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}}{6}=\frac{1}{6}$, $p_{A_1}(B_2)=0$, $p_{A_2}(B_2)=0$;

$p(B_2)=p_{A_0}(B_2)p(A_0)+p_{A_1}(B_2)p(A_1)+p_{A_2}(B_2)p(A_2)=\frac{1}{6}.\frac{6}{15}+0.\frac{8}{15}+0.\frac{1}{15}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$.

d. On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage, on connaît donc B_1. Nous cherchons alors

$$p_{B_1}(A_1)=\frac{p(A_1\cap B_1)}{p(B_1)}=\frac{p_{A_1}(B_1)p(A_1)}{p(B_1)}=\frac{\frac{1}{2}.\frac{8}{15}}{\frac{8}{15}}=\frac{1}{2}.$$

3. $p(R)=p(A_0\cap B_2)+p(A_1\cap B_1)=p(A_0)p_{A_0}(B_2)+p(A_1)p_{A_1}(B_1)$, soit $p(R)=\frac{6}{15}.\frac{1}{6}+\frac{8}{15}.\frac{3}{6}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

18. Club photo

Dans une classe de trente élèves sont formés un club photo et un club de théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.

1. On interroge un élève de la classe pris au hasard. On appelle P l'événement : « l'élève fait partie du club photo » et T l'événement : « l'élève fait partie du club théâtre ». Montrer que les événements P et T sont indépendants.

2. Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.

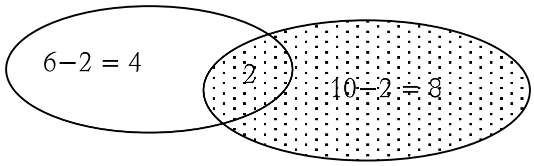
a. On appelle T_1 l'événement : « Le premier élève appartient au club théâtre ». Calculer $P(T_1)$.

b. On appelle T_2 l'événement « L'élève pris en photo appartient au club théâtre ». Calculer $P_{T_1}(T_2)$ puis $P_{\overline{T_1}}(T_2)$. En déduire $P(T_2 \cap T_1)$ et $P(T_2 \cap \overline{T}_1)$.

c. **Démonstration de cours** : Démontrer que $P(T_2) = P_{T_1}(T_2)P(T_1) + P_{\overline{T_1}}(T_2)P\left(\overline{T_1}\right)$. Calculer $P(T_2)$.

3. Toutes les semaines on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite.

Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines aucun membre du club théâtre n'ait été photographié.



Correction

1. Avec des patates le résultat est immédiat (en fait on n'en a pas besoin, c'est juste pour montrer que je suis super fortiche avec Word…).

P(P) = 10/30 = 1/3 et P(T) = 6/30 = 1/5.

On a alors $P(\mathrm{P} \cap \mathrm{T}) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ et $P(\mathrm{P}) \times P(\mathrm{T}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$ donc les événements sont indépendants. Ceci est un pur hasard de calcul, si vous changez par exemple le nombre d'élèves dans la classe ça ne marche plus….

2. Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.

a. $P(T_1) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

b. $P_{T_1}(T_2) = \frac{1}{9}$: il reste à tirer un membre du club théâtre parmi les neuf restants.

$P_{\overline{T_1}}(T_2) = \frac{2}{9}$: si $\overline{T_1}$ est réalisé le premier élève ne fait pas de théaâre, il reste deux choix parmi 9 restants.

$P(T_2 \cap T_1) = P_{T_1}(T_2)P(T_1) = \frac{1}{9} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{45}$; $P(T_2 \cap \overline{T_1}) = P_{\overline{T_1}}(T_2)P(\overline{T_1}) = \frac{2}{9} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{45}$.

b. Avec les probabilités totales, on a

$P(T_2) = P\left((T_1 \cap T_2) \cup (\overline{T_1} \cap T_2)\right) = P\left(T_1 \cap T_2\right) + P\left(\overline{T_1} \cap T_2\right) = P_{T_1}(T_2)P(T_1) + P_{\overline{T_1}}(T_2)P(\overline{T_1})$.

Donc $P(T_2) = \frac{1}{45} + \frac{8}{45} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$.

Le calcul aurait pu se faire directement avec un arbre.

3. Loi binomiale : $n = 4$, $p = 1 - P(T_2) = \frac{4}{5}$; la probabilité cherchée est, en posant X = nombre de fois où l'élève photographié n'appartient pas au club théâtre : $P(X = 4) = \binom{4}{4} p^4 (1-p)^0 = \frac{4^4}{5^4} = \frac{256}{625}$.

19. Cartes

On tire 8 cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de :

1. Tirer tous les coeurs ?

2. Tirer les 4 as ?

3. Tirer 5 coeurs et 3 trèfles ?

4. Tirer 5 coeurs ni plus ni moins et 3 rois ni plus ni moins ?

Correction

1. Nombre total de tirages : $\binom{32}{8}=N$. Proba de tous les cœurs : on tire les 8 cartes parmi 8 (cœurs), soit $\binom{8}{8}=1$, soit $1/N$.

2. On tire 4 cartes parmi les 4 as, soit encore 1 et 4 autres cartes parmi 28 restantes, soit $\binom{28}{4}$, au final la proba est $\dfrac{1\times\binom{28}{4}}{N}$.

3. On tire 5 cœurs parmi 8 cœurs et 3 trèfles parmi 8 trèfles, soit $\binom{8}{5}\binom{8}{3}/N$.

4. Attention au roi de cœur… 5 cœurs parmi 8 cœurs et 3 rois parmi 3, soit $\binom{8}{5}\binom{3}{3}$ auxquelles on ajoute les combinaisons contenant le roi de cœur, soit $\binom{1}{1}\binom{7}{4}\binom{21}{3}$ (R de cœur, 4 cœurs parmi 7, 3 cartes ni Roi ni cœur).

20. Boules et urnes

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires (n est un nombre entier supérieur ou égal à 1). U_2 contient deux boules blanches et une boule noire.

On tire une boule au hasard de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 ; l'ensemble des ces opérations constitue une épreuve.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

2. On considère l'événement A : "Après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ".

2. a. Démontrer que la probabilité $p(A)$ de l'événement A peut s'écrire : $p(A)=\frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$

2. b. Déterminer la limite de $p(A)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On considère l'événement B : "Après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche".

Calculer $p(B)$.

4. Un joueur mise 20 francs et effectue une épreuve. A l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches dans U_2.

- Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit $2n$ francs ;
- Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n francs ;
- Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

4. a. Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10.

Dans la suite, on considère $n > 10$, et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeur les gains algébriques du joueur (par exemple, si, après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche, $X = 2n - 20$).

4.b. Déterminer la loi de probabilité de X.

4.c. Calculer l'espérance mathématique de X.

4.d. On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive. Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.

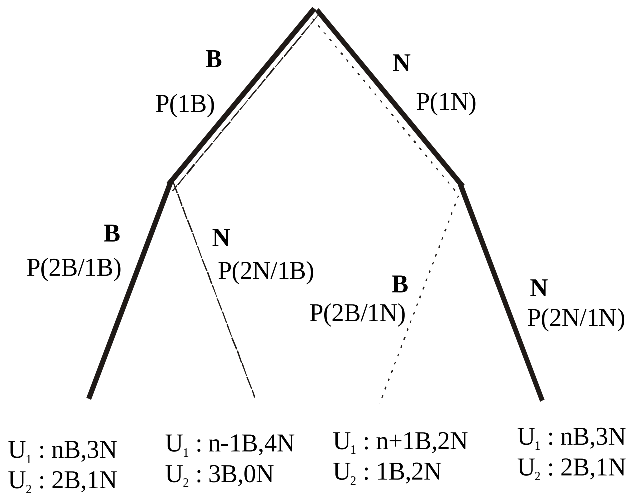
Correction

1.a. Arbre pondéré :

Evénement A : chemin ▬▬▬

Evénement B : chemin ....

Evénement C : chemin – – – – – – – –



$p(1\text{B})=\dfrac{n}{n+3}$; $p(1\text{N})=\dfrac{3}{n+3}$.

$p(2\text{B}/1\text{B}) = \dfrac{3}{4}$; $p(2\text{N}/1\text{B}) = \dfrac{1}{4}$; $p(2\text{B}/1\text{N}) = \dfrac{1}{2}$; $p(2\text{N}/2\text{B}) = \dfrac{1}{2}$

2. a. La probabilité p(A) se calcule en parcourant l'arbre : $p(\text{A})=\dfrac{n}{n+3}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{n+3}\times\dfrac{1}{2}$, soit $p(A)=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)$.

2. b. $\lim\limits_{n\to+\infty} p(\text{A})=\dfrac{3}{4}$.

3. La probabilité p(B) se calcule en parcourant l'arbre : $p(B)=\dfrac{3}{n+3}\times\dfrac{1}{2}$, $p(B)=\dfrac{3}{2(n+3)}$.

4. a. Le joueur doit être certain de pouvoir, dans le meilleur des cas, récupérer au moins sa mise d'où $2n > 20$, soit $n > 10$.

4. b. Le dernier événement non encore considéré (C) est : "Après l'épreuve, l'urne U_2 contient 3 boules blanches".

La probabilité p(C) se calcule en parcourant l'arbre : $p(\text{C})=\dfrac{n}{n+3}\times\dfrac{1}{4}$, $p(\text{C})=\dfrac{n}{4(n+3)}$

La variable aléatoire X peut prendre 3 valeurs : $2n - 20$ (événement A) ; $n - 20$ (événement B) ; -20 (événement C).

Loi de probabilité de la variable aléatoire X :

x_i	$2n - 20$	$n - 20$	-20
$p(X = x_i)$	$\dfrac{3}{2(n+3)}$	$\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)$	$\dfrac{n}{4(n+3)}$

4. c. Espérance mathématique : E(x) = $\text{E(X)}=\dfrac{(2n-20)\times 3}{2(n+3)}+(n-20)\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)-\dfrac{20n}{4(n+3)}$, soit

$$E(X)=\frac{3n^2-62n-240}{4(n+3)}.$$

4. d. E(X) > 0 donne $3n^2-62n-240>0$, soit $(3n+10)(n-24)>0$ et $n\in[25\,;+\infty[$ puisque n est entier.

21. Boules, Antilles Guyane, sept 1999

4,5 points

Dans tout l'exercice on considère 20 boules indiscernables au toucher (10 noires et 10 blanches) et deux urnes A et B dans chacune desquelles on placera 10 boules suivant un mode qui sera précisé dans chaque question.

1. On choisit dix boules au hasard et on les met dans l'urne A. On place les dix autres boules dans l'urne B.

a. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes ne contiennent chacune que des boules de même couleur ?

b. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes contiennent chacune 5 boules blanches et 5 boules noires ?

2. Soit x un entier tel que $0\le x\le 10$. On place maintenant x boules blanches et $10-x$ boules noires dans l'urne A et les $10-x$ boules blanches et x boules noires restantes dans l'urne B.

On procède à l'expérience E : on tire au hasard une boule de A et on la met dans B, puis on tire au hasard une boule de B et on la met dans A.

On désigne par M l'évènement « chacune des deux urnes a la même composition avant et après l'expérience ».

a. Pour cette question on prend $x=6$. Quelle est la probabilité de l'évènement M ?

b. Montrer que la probabilité de l'évènement M est égale à : $\frac{1}{55}\left(-x^2+10x+5\right)$.

c. Pour quelles valeurs de x l'évènement M est-il plus probable que l'événement contraire $\overline{\text{M}}$?

Correction

1. a. Pour avoir dix boules de même couleur dans chaque urne il faut avoir 10 noires dans A et 10 Blanches dans B ou le contraire.

Le nombre de répartitions est de $\binom{20}{10}$, le nombre de choix permettant 10 noires dans A et 10 blanches dans B est $\binom{10}{10}\binom{10}{10}=1$; la probabilité est donc $2\times\frac{1}{\binom{20}{10}}=\frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{20.19.18.17.16.15.14.13.12.11}\approx 10^{-5}$.

b. 5 boules blanches et 5 boules noires dans A : $\binom{10}{5}\binom{10}{5}$, soit une probabilité d'environ 0,34.

2. a. x=6 : il faut tirer une blanche de A et la mettre dans B puis tirer une blanche de B et la mettre dans A, soit $\frac{6}{10}\times\frac{5}{11}$ ou bien tirer une noire de A et la mettre dans B puis tirer une noire de B et la mettre dans A, soit $\frac{4}{10}\times\frac{7}{11}$; au total cela fait $\frac{30}{110}+\frac{28}{110}=\frac{58}{110}$.

b. Même raisonnement :

$$P(\text{M})=\frac{x}{10}\times\frac{10-x+1}{11}+\frac{10-x}{10}\times\frac{x+1}{11}=\frac{1}{110}\left(11x-x^2+9x-x^2+10\right)=\frac{1}{55}\left(-x^2+10x+5\right).$$

c. On veut savoir quand $P(\text{M})\ge 1-P(\text{M})\Leftrightarrow p(\text{M})\ge\frac{1}{2}$, soit $-x^2+10x+5\ge\frac{55}{2}\Leftrightarrow -x^2+10x-\frac{45}{2}\ge 0$ d'où après résolution : $3,42\le x\le 6,58$. Il faut donc qu'il y ait 4, 5 ou 6 boules blanches dans l'urne A.

22. Urnes

Les questions 1. et 2. sont indépendantes. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Une urne U_1 contient 4 jetons blancs et 3 noirs et une urne U_2 contient 17 jetons blancs et 18 noirs.

1. On jette un dé cubique dont chaque face a la même probabilité d'apparaître. Si le 6 apparaît, on tire un jeton de l'urne U_1 sinon on tire un jeton de l'urne U_2 .

a. Déterminer la probabilité de tirer un jeton blanc (on considérera les événements A : "On a obtenu 6 en jetant le dé" et B : "On obtient un jeton blanc".)

b. On a tiré un jeton blanc ; calculer la probabilité pour qu'il provienne de U_1.

c. On a tiré un jeton noir ; calculer la probabilité pour qu'il provienne de U_2.

2. On tire successivement et sans remise les 7 jetons de l'urne U_1.

X est la variable aléatoire qui prend pour valeur k si le premier jeton blanc apparaît au k-ième tirage.

Donner la loi de probabilité de X, puis calculer son espérance mathématique et son écart-type.

Correction

1. a. $p(A)=\dfrac{1}{6}$; $p(\overline{A})=\dfrac{5}{6}$; $p(B/A)=\dfrac{4}{7}$; $p(B/\overline{A})=\dfrac{17}{35}$

D'après la loi des probabilités totales on a : $p(B)=p(A\cap B)+p(\overline{A}\cap B)=\dfrac{4}{7}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{17}{35}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{2}$.

b. $p_B(A)\times p(B)=p(A\cap B)$ d'où $p_B(A)=\dfrac{(4/7)\times(1/6)}{1/2}=\dfrac{4}{21}$.

c. De même on a : $p(\overline{A}/\overline{B})\times p(\overline{B})=p(\overline{A}\cap\overline{B})$ d'où $p(\overline{A}/\overline{B})=\dfrac{(18/35)\times(5/6)}{1/2}=\dfrac{6}{7}$

2. Ensemble des valeurs de X : {1 ; 2 ; 3 ; 4} :

k	1	2	3	4
$p(X=k)$	$\dfrac{4\times 6!}{7!}=\dfrac{4}{7}$	$\dfrac{3\times 4\times 5!}{7!}=\dfrac{2}{7}$	$\dfrac{4\times 3\times 2\times 4!}{7!}=\dfrac{4}{35}$	$\dfrac{3!\times 4!}{7!}=\dfrac{1}{35}$

$E(X)=1\times\dfrac{4}{7}+2\times\dfrac{2}{7}+3\times\dfrac{4}{35}+4\times\dfrac{1}{35}=\dfrac{8}{35}$

$E(X^2)=1\times\dfrac{4}{7}+2^2\times\dfrac{2}{7}+3^2\times\dfrac{4}{35}+4^2\times\dfrac{1}{35}=\dfrac{20}{7}$; $var(X)=\dfrac{20}{7}-\left(\dfrac{8}{35}\right)^2$; $\sigma(X)\approx 1,69$.

23. Boules et suite

Une urne contient n boules blanches ($n\geq 5$) et 10 boules noires. On tire au hasard et simultanément 10 boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité p_n pour que l'on ait tiré exactement 5 boules noires ?

2. Déterminer la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction

Il y a $n+10$ boules ; il y a donc $\begin{pmatrix} n+10 \\ 10 \end{pmatrix}$ tirages possibles ; on tire 5 noires avec la probabilité

$$p_n=\frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ 5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n+10 \\ 10 \end{pmatrix}}=\frac{\dfrac{10!}{5!5!}\dfrac{n!}{5!(n-5)!}}{\dfrac{(n+10)!}{10!n!}}=K\frac{n!n!}{(n-5)!(n+10)!}=K\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(n+10)(n+9)\dots(n+2)(n+1)},$$

donc $p_n \approx K\frac{n^5}{n^{10}} \approx K\frac{1}{n^5}$ qui est décroissante et tend vers 0.

24. Exercice de base : Efficacité d'un test

Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

Chez les individus malades, 95% des tests sont positifs et 5% négatifs.

Chez les individus non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs.

On choisit un individu au hasard.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

2. Quelle est la probabilité

a. qu'il soit malade et qu'il ait un test positif ?

b. qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test négatif ?

c. qu'il ait un test positif ?

d. qu'il ait un test négatif ?

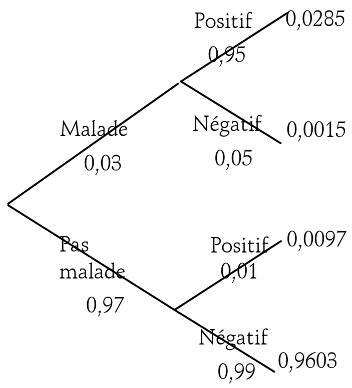
3. Calculer la probabilité

a. qu'il ne soit pas malade, sachant que le test est positif ?

b. qu'il soit malade, sachant que le test est négatif ?

4. Interpréter les résultats obtenus aux questions 3. a. et 3. b.

Correction



1. Voir ci-contre.

2. On note M l'individu est malade et T le test est positif :

a. $P(M\cap T)=0,03\times 0,95=0,0285$ (pour bien faire il faudrait rédiger en utilisant les probabilités conditionnelles, mais l'arbre est ici bien suffisant).

b. $P(\overline{M}\cap\overline{T})=0,97\times 0,99=0,9603$.

c. $P(T)=P(\overline{M}\cap T)+P(M\cap T)=0,0097+0,0285=0,0382$.

d. $P(\overline{T})=P(\overline{M}\cap\overline{T})+P(M\cap\overline{T})=0,0015+0,9603=0,9618$.

3. a. $P_T(\overline{M})=\frac{P(T\cap\overline{M})}{P(T)}=\frac{0,0097}{0,0382}\approx 0,25$: c'est énorme…

b. $P_{\overline{T}}(M)=\frac{P(\overline{T}\cap M)}{P(\overline{T})}=\frac{0,9603}{0,9618}\approx 0,998$: ouf… c'est mieux.

25. Exercice de base 1 : temps d'attente

Le bus passe toutes les quinze minutes à un arrêt précis. Un usager se présente à cet arrêt entre 7 heures et 7 heures 30. La variable aléatoire sera l'heure exacte de son arrivée à cet arrêt, uniformément répartie sur l'intervalle [0 ; 30].

1. Quelle est la probabilité que l'usager attende moins de 5 minutes le prochain bus ?

2. Quelle est la probabilité qu'il attende plus de dix minutes ?

Correction

La variable aléatoire est le temps uniformément réparti sur 30 minutes donc $f(x) = 1/30$.

1. L'attente n'est inférieure à cinq minutes que s'il arrive entre 7 h 10 et 7 h 15 ou entre 7 h 25 et 7 h 30. On a donc $p(10 \le X \le 15) = p(25 \le X \le 30) = \int_{25}^{30} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{6}$, soit la probabilité cherchée égale à $2.\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

2. De même on a $p(0 \le X \le 5) + p(15 \le X \le 20) = \frac{1}{3}$.

26. Exercice de base 2 : attente

On suppose que la durée d'une conversation téléphonique, mesurée en minutes, est la variable exponentielle de paramètre $\frac{1}{10}$. Vous arrivez à une cabine téléphonique et juste à ce moment précis, une personne passe devant vous.

1. Quelle est la probabilité que vous attendiez plus de dix minutes ?

2. Quelle est la probabilité que vous attendiez entre dix et vingt minutes ?

Correction

1. L'attente est supérieure à dix minutes, on a $p(X > 10) = e^{-\frac{1}{10} \times 10} = e^{-1} \approx 0,37$.

2. De même on a $p(10 \le \mathrm{X} \le 20) = p(10 \le X \le 20) = \int_{10}^{20} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = e^{-1} - e^{-2} \approx 0,23$.

27. Exercice de base 3 : ABS

On s'intéresse à la présence sur les véhicules d'un parc automobile des trois dispositifs de sécurité suivants : ABS ; Air Bags ; Correcteur de trajectoire.

On sait que 7 véhicules ne sont munis d'aucun de ces dispositifs, alors que 18 véhicules sont munis des trois dispositifs.

Tous les véhicules munis d'un correcteur de trajectoire sont munis aussi d'au moins un autre dispositif de sécurité.

305 véhicules disposent de deux dispositifs de sécurité au moins.

298 véhicules disposent de l'ABS, 428 véhicules disposent d'air bags et 122 véhicules disposent des deux.

Enfin 87 véhicules disposent de l'ABS et d'un correcteur de trajectoire.

1. Représenter ces données par un diagramme.

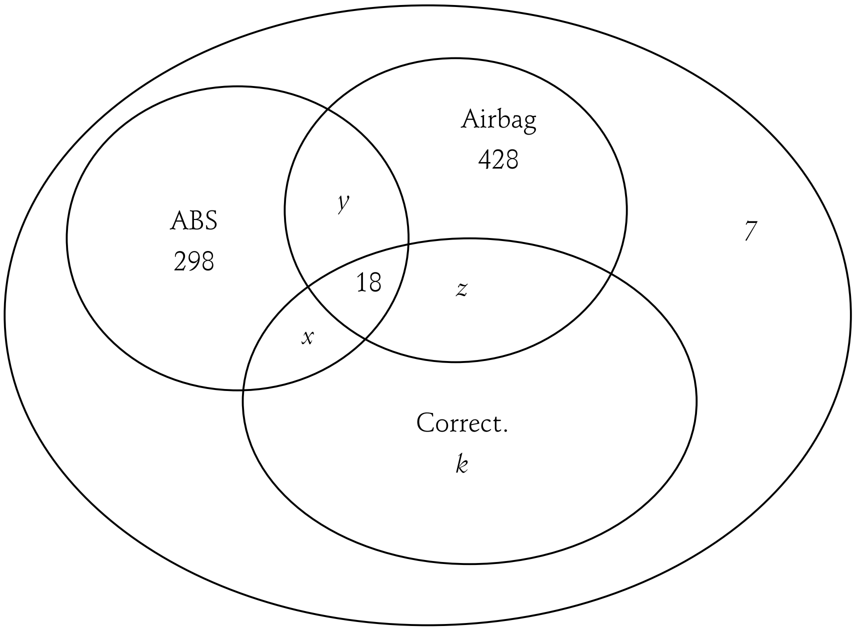
2. Quel est le nombre total de véhicules de ce parc automobile ?

3. Quel est le nombre de véhicules de ce parc disposant d'un et d'un seul dispositif de sécurité ?

4. Quel est le nombre de véhicules de ce parc disposant d'au plus un dispositif de sécurité ?

Correction

1. $x = \mathrm{card}(\mathrm{ABS} \cap \mathrm{Correct})$, $y = \mathrm{card}(\mathrm{ABS} \cap \mathrm{Airbag})$, $z = \mathrm{card}(\mathrm{Correct} \cap \mathrm{Airbag})$, $k = \mathrm{card}(\mathrm{Correct})$.



Tous les véhicules munis d'un correcteur de trajectoire sont munis aussi d'au moins un autre dispositif de sécurité : $k = x + z - 18$; 305 véhicules disposent de deux dispositifs de sécurité au moins : $(x-18)+(y-18)+(z-18)+18 = 305$; 122 véhicules disposent d'ABS et d'Airbag : $y = 122$; 87 véhicules disposent de l'ABS et d'un correcteur de trajectoire : $x = 87$.

$(x-18)+(y-18)+(z-18)+18 = 305 \Leftrightarrow 69+104+z = 305 \Leftrightarrow z = 132$.

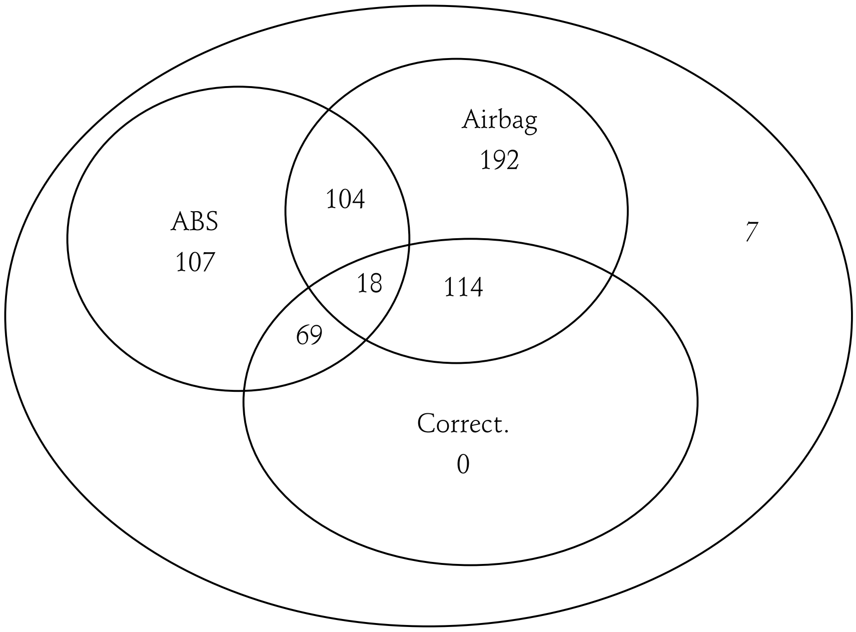
$k = x + z - 18 = 87 + 132 - 18 = 201$.

2. Au total on a

$107+192+0+104+114+69+18+7$
$= 611$ véhicules.

3. $107+192+0 = 299$.

4. Heu, le contraire c'est aucun, non ¿ C'est pas ça, au plus un c'est 0 ou 1, donc ça fait $299+7 = 306$.



28. Cubes pour enfants

Une boîte contient 8 cubes :

- 1 gros rouge et 3 petits rouges,
- 2 gros verts et 1 petit vert,
- 1 petit jaune.

Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte. On admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur.

Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1. On note A l'événement : "Obtenir des cubes de couleurs différentes" et B l'événement : "Obtenir au plus un petit cube".

a. Calculer la probabilité de A.

b. Vérifier que la probabilité de B est égale à $\frac{2}{7}$.

2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

3. L'enfant répète 5 fois l'épreuve "tirer simultanément 3 cubes de la boîte", en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants.

On note p la probabilité que l'événement B soit réalisé.

a. Déterminer la probabilité que B soit réalisé au moins une fois à l'issue des 5 épreuves.

b. Déterminer la probabilité que l'événement B soit réalisé exactement 3 fois.

<u>Correction</u>

Préliminaire : il y a $\binom{8}{3}=\frac{8\times 7\times 6}{3\times 2}=8\times 7=56$ éventualités, c'est-à-dire 56 façons de tirer les 3 cubes.

1. Obtenir des cubes de couleur différente revient à obtenir 1 rouge ET 1 vert ET 1 jaune, c'est-à-dire obtenir un rouge parmi les 4, et 1 vert parmi les 3 et le jaune : $p(A)=\frac{\binom{4}{1}\times\binom{3}{1}\times 1}{\binom{8}{3}}=\frac{4\times 3\times 1}{56}=\frac{3}{14}$.

Obtenir au plus un petit cube c'est n'en obtenir aucun OU en obtenir un seul.

$$p(B)=\frac{\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}}+\frac{\binom{5}{1}\times\binom{3}{2}}{\binom{8}{3}}=\frac{1}{56}+\frac{5\times 3}{56}=\frac{16}{56}=\frac{2}{7}.$$

En effet, n'obtenir aucun cube, c'est prendre les 3 gros, et il n'y a qu'une possibilité (3 parmi les 3) OU n'en prendre qu'un (parmi les 5) ET prendre 2 gros cubes (parmi les 3).

2.a. La variable aléatoire donne le nombre de petis cubes rouges tirés ; il y en en trois en tout, on peut donc en tirer 0, 1, 2 ou 3.

- Aucun petit cube rouge: $p(X=0)=\frac{\binom{3}{0}\times\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{1\times\frac{5\times 4\times 3}{3\times 2}}{56}=\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$.
- Un seul petit cube rouge $p(X=1)=\frac{\binom{3}{1}\times\binom{5}{2}}{\binom{8}{3}}=\frac{3\times\frac{5\times 4}{2}}{56}=\frac{30}{56}=\frac{15}{28}$.

- Deux petits cubes $p(X=2)=\dfrac{\binom{3}{2}\times\binom{5}{1}}{\binom{8}{3}}=\dfrac{3\times 5}{56}=\dfrac{15}{56}$.

- Trois petits cubes rouges $p(X=3)=\dfrac{\binom{3}{3}\times\binom{5}{0}}{\binom{8}{3}}=\dfrac{1\times 1}{56}=\dfrac{1}{56}$.

Loi de probabilité :

$x_k = (X = k)$	0	1	2	3	Somme Σ
$p_k = p(X = k)$	$\dfrac{5}{28}$	$\dfrac{15}{28}$	$\dfrac{15}{56}$	$\dfrac{1}{56}$	1
$p_k\, x_k$	0	$\dfrac{15}{28}$	$\dfrac{15}{28}$	$\dfrac{3}{56}$	$\dfrac{63}{56}=\dfrac{9}{8}$

2.b. $E(X)=\sum_{k=0}^{k=3} p_k x_k=\dfrac{15}{28}+\dfrac{15}{28}+\dfrac{3}{56}=\dfrac{9}{8}$.

3. Les événements sont indépendants. Il s'agit d'un schéma de Bernouilli. avec :

- Succès : "Obtenir au plus un petit cube."
- $p = p(S) = 2/7$ (Voir question 1.)
- Il y a 5 épreuves.
- On obtient k succès lors des n épreuves.

$$p(Y=k)=\binom{5}{k}p^k(1-p)^{5-k}=\binom{5}{k}\left(\frac{2}{7}\right)^k\left(\frac{5}{7}\right)^{5-k}.$$

a. On veut obtenir au moins un succès lors des 5 épreuves. On appelle Y la variable aléatoire qui donne le nombre de succès lors des 5 épreuves. Il s'agit de calculer $p(Y \geq 1)$ ou encore $1 - p(Y = 0)$:

$$p(Y\geq 1)=1-p(Y=0)=1-\binom{5}{0}p^0(1-p)^{5-0}=1-\left(\frac{5}{7}\right)^5=\frac{13682}{16807}\approx 0{,}8141.$$

b. $p(Y=3)=\binom{5}{3}p^3(1-p)^{5-3}=\binom{5}{3}\times\left(\frac{2}{7}\right)^3\times\left(\frac{5}{7}\right)^2=\dfrac{2000}{16807}\approx 0{,}1190$.

29. Urne

Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4.

On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté a, porté sur le jeton, puis on remet le jeton tiré dans l'urne.

On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne, et on note b le numéro du jeton tiré.

On note G l'événement : "La partie est gagnée", lorsque la somme des numéros a et b est égale à 5.

1. Montrer que la probabilité de gagner est égale à $\dfrac{1}{4}$.

2. Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la question 1.

Si A gagne et B perd, A est déclaré vainqueur, et le jeu s'arrête, si A perd et B gagne, B est déclaré vainqueur, et le jeu s'arrête, dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie ; le jeu continue.

Pour tout entier n, on désigne les événements suivants :

A_n : "A gagne la nième partie".

B_n : "B gagne la nième partie".

C_n : "Le jeu continue après la nième partie."

a. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$, et $p(C_1)$.

b. Exprimer $p(C_{n+1})$ en fontion de $p(C_n)$ et montrer que $p(C_n)=\left(\dfrac{5}{8}\right)^n$.

c. Exprimer $p(A_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et en déduire que $p(A_n)=\dfrac{3}{16}\times\left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-1}$

d. Déterminer la limite de $p(A_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

e le plus petit entier n tel que $p(A_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01.

<u>Correction</u>

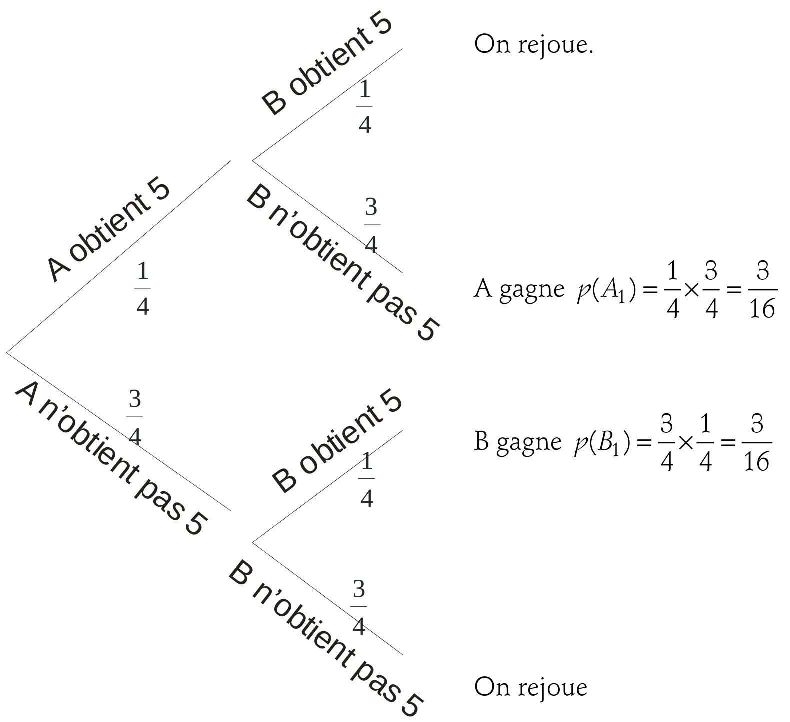
1. Il y a 4 possibilités pour le premier jeton ET 4 possibilités pour le second, soit $4\times 4 = 16$ éventualités.

Pour gagner une partie, la somme doit être égale à 5. C'est-à-dire avoir l'un des couples suivants (1 ; 4), (2 ; 3), (3 ; 2), (4 ; 1), soit 4 des 16 éventualités. p(G) = 1/4.

2. a. Pour une partie donnée la situation peut être représentée par un arbre.

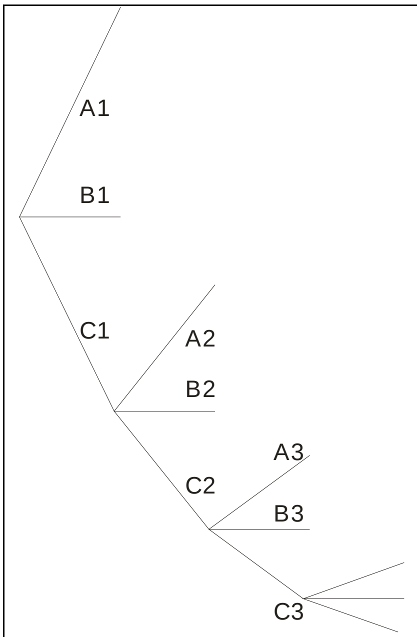
Pour calculer $p(C_1)$, on a : $p(C_1) = 1 - [p(A_1) + p(B_1)] = 1-\dfrac{3}{16}-\dfrac{3}{16}=\dfrac{10}{16}=\dfrac{5}{8}$ ou encore, en utilisant l'arbre :

$p(C_1)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{16}+\dfrac{9}{16}=\dfrac{10}{16}=\dfrac{5}{8}$.



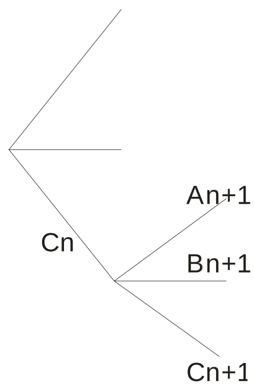
2.b.

	On peut représenter les parties avec un nouvel arbre dont les branches se terminent lorsque l'un ou l'autre des joueurs A et B a gagné. Dans le cas



(fig 1)

contraire, une nouvelle ramification se crée.



(fig 2)

Pour chaque branche, la probabilité que l'on rejoue sachant que personne n'a gagné au tour précédent est de $\frac{5}{8}$. On a donc $p(C_{n+1}) = \frac{5}{8} \times p(C_n)$. C'est une suite géométrique de raison $\frac{5}{8}$ et de premier terme $\frac{5}{8}$, on obtient $p(C_n) = \left(\frac{5}{8}\right)^n$.

2.c. De la même façon on a (fig.2) $p(A_{n+1}) = \frac{3}{16} \times p(C_n) = \frac{3}{16} \times \left(\frac{5}{8}\right)^n$ d'où $p(A_n) = \frac{3}{16} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$.

2.d. $\lim\limits_{n\to+\infty} p(A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{16} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} = 0$ car $\frac{5}{8} < 1$.

2.e.

$$\frac{3}{16} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} < 0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} < \frac{\frac{1}{100}}{\frac{3}{16}} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} < \frac{16}{300} \Leftrightarrow (n-1)\ln\frac{5}{8} < \ln\frac{16}{300}$$

$$\Leftrightarrow n-1 > \frac{\ln\frac{16}{300}}{\ln\frac{5}{8}} \approx 6,2 \Leftrightarrow n > 7,2.$$

(On change de sens car $\ln\frac{5}{8} < 1$)

On déduit que le plus petit entier naturel n tel que $p(A_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01 est $n = 8$.

30. Tulipes

Un lot de tulipes a un pouvoir germinatif de 80% ; cela signifie que l'on considère que chaque bulbe a une probabilité égale à $\frac{4}{5}$ de produire une fleur et cela indépendamment des autres bulbes.

Chaque bulbe contient l'un des trois gènes R (rouge), B (blanc) et J (jaune) qui détermine la couleur de la future fleur éventuelle.

On suppose que la probabilité pour qu'un bulbe possède le gène R est $\frac{1}{2}$, la probabilité pour qu'un bulbe possède le gène B est $\frac{1}{10}$, et la probabilité pour qu'un bulbe possède le gène J est $\frac{2}{5}$.

1. a. Tracer un arbre pondéré traçant la floraison d'un bulbe.

b. Quelle est la probabilité pour qu'un bulbe planté produise une fleur rouge ?

c. Quelle est la probabilité pour qu'un bulbe planté produise une fleur blanche ?

2. On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre k de fleurs rouges obtenues après avoir planté 5 bulbes.

a. Démontrer qu'il s'agit d'un schéma de Bernouilli dont on donnera les éléments caractéristiques.

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer E(X).

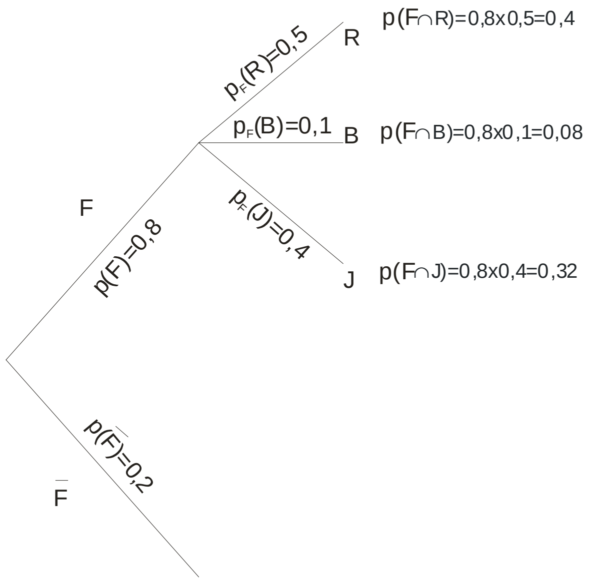
3. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

On désigne par p_n la probabilité de n'obtenir aucune tulipe blanche après avoir planté n bulbes.

Calculer p_n.

4. Combien de bulbes doit-on planter, au minimum, pour obtenir au moins une tulipe blanche, avec une probabilité supérieure ou égale à $\frac{19}{20}$?

Correction



b. $p(F\cap R)=p(F)\times p_F(R)=0,8\times 0,5=0,4$.

c. $p(F\cap B)=p(F)\times p_F(B)=0,8\times 0,1=0,08$.

2.a. * Le succès est obtenir une fleur Rouge, il y a $n = 5$ épreuves, il y a k succès : $p=p(F\cap R)=0,4$.

b.

$p(X=0)=\binom{5}{0}(0,4)^0\times(0,6)^5=0,07776$, $p(X=1)=\binom{5}{1}(0,4)^1\times(0,6)^4=0,2592$,

$p(X=2)=\binom{5}{2}(0,4)^2\times(0,6)^3=0,3456$, $p(X=3)=\binom{5}{3}(0,4)^3\times(0,6)^2=0,2304$,

$p(X=4)=\binom{5}{4}(0,4)^4\times(0,6)^1=0,0768$, $p(X=5)=\binom{5}{5}(0,4)^5\times(0,6)^0=0,01024$.

$X=x_i$	0	1	2	3	4	5
$p(X=x_i)$	0,0776	0,2592	0,3456	0,2304	0,0768	0,01024
$p_i\times x_i$	0	0,2592	0,6912	0,6912	0,3072	0,0512

$E(X)=\sum_{i=1}^{5}p_i\times x_i=2$.

3. On a répété n fois l'expérience, et on n'a obtenu aucune fleur blanche : $p_n(X=0)=\binom{n}{0}(0,08)^0\times(0,92)^n$.

4. Le contraire de "au moins une fleur blanche" est "aucune fleur blanche" : cette probabilité est donc $p=1-p_n=1-0,92^n$. Il faut donc que

$1-0,92^n\geq\frac{19}{20}\Leftrightarrow 0,92^n\leq 1-\frac{19}{20}\Leftrightarrow 0,92^n\leq\frac{1}{20}\Leftrightarrow \ln 0,92^n\leq\ln\frac{1}{20}\Leftrightarrow n\ln 0,92\leq-\ln 20\Leftrightarrow n\geq\frac{-\ln 20}{\ln 0,92}\approx 35,9$.

On doit donc planter au minimum 36 fleurs pour avoir une probabilité supérieure à 19/20 d'obtenir une fleur Blanche.

31. Jetons

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :

- 4 jetons blancs marqués 0 ;
- 3 jetons rouges marqués 7 ;
- 2 jetons blancs marqués 2 ;
- 1 jeton rouge marqué 5.

1. On tire simultanément 4 jetons du sac. Quel est le nombre de tirages possibles.

2. On considère que tous les tirages sont équiprobables et on considère les événements suivants :

A : "Les 4 numéros sont identiques."

B : "Avec les jetons tirés on peut former le nombre 2000."

C : "Tous les jetons sont blancs."

D : "Tous les jetons sont de la même couleur."

E : "Au moins un jeton porte un numéro différent des autres."

a. Calculer la probabilité de B

b. Calculer la probabilité des événements A, C, D et E.

c. On suppose que l'événement C est réalisé, calculer alors la probabilité de l'événement B.

3. On établit la règle du jeu suivante :

Si le joueur peut former le nombre 7000 il gagne 75 **€.**

Si le joueur peut former le nombre 2000 il gagne 25 **€.**

Si le joueur peut former le nombre 0000 il perd 15 **€.**

Pour tous les autres tirages, il perd 5 **€.**

G est la variable aléatoire égale au gain du joueur. Etablir la loi de probabilité de G et calculer son espérance mathématique.

Correction

1. Il y a $\binom{10}{4}=210$ tirages distincts possibles.

2. a. $p(B)=\dfrac{\binom{2}{1}\times\binom{4}{3}}{210}=\dfrac{8}{210}=\dfrac{4}{105}$.

b. A n'est réalisé que lorsque les 4 jetons portent le numéro 0, il n'y a qu'une possibilité. $p(A)=\dfrac{1}{210}$.

Il y a 6 jetons blancs. La probabilité est donc : $p(C)=\dfrac{\binom{6}{4}}{210}=\dfrac{15}{210}=\dfrac{1}{14}$.

Les jetons peuvent être, soit tous blancs, soit tous rouges. Or il n'y a que 4 jetons rouges, donc une seule possibilité qu'ils soient tous rouges : $p(D)=p(C)+\dfrac{1}{210}=\dfrac{16}{210}=\dfrac{8}{105}$.

Au moins un jeton porte un numéro différent des autres. Le contraire est "tous les jetons ont le même numéro", qui n'est réalisé que pour le numéro 0. $p(E)=1-p(A)=\dfrac{209}{210}$.

c. C est réalisé, c'est-à-dire tous les jetons sont blancs. On rappelle que 4 d'entre eux ont le numéro 0 et deux d'entre eux, le numéro 2.

Pour que B soit réalisé, la probabilité est donc de $p_C(B)=\dfrac{p(B\cap C)}{p(C)}=\dfrac{p(B)}{p(C)}=\dfrac{\frac{4}{105}}{\frac{1}{14}}=\dfrac{8}{15}$, en effet on a $p(B\cap C)=p(B)$ car on ne peut former 2000 qu'avec des jetons blancs.

3. Pour 7000 : $p(G=75)=\dfrac{\binom{3}{1}\times\binom{4}{3}}{210}=\dfrac{12}{210}=\dfrac{2}{35}$; pour 2000 : $p(G=25)=p(B)=\dfrac{4}{105}$; pour 0000 : $p(G=-15)=\dfrac{1}{210}$; les autres : $p(G=-5)=1-\left(\dfrac{2}{35}+\dfrac{4}{105}+\dfrac{1}{210}\right)=1-\dfrac{12+8+1}{210}=\dfrac{189}{210}$.

G	-15	-5	25	75	
$p(G=x_i)$	$\dfrac{1}{210}$	$\dfrac{189}{210}$	$\dfrac{4}{105}=\dfrac{8}{210}$	$\dfrac{2}{35}=\dfrac{12}{210}$	1
$p_i x_i$	$\dfrac{-15}{210}$	$\dfrac{-5\times 189}{210}$	$\dfrac{25\times 8}{210}$	$\dfrac{75\times 12}{210}$	$\dfrac{2}{3}$

$E(G)=\dfrac{-15-945+200+900}{210}=\dfrac{140}{210}=\dfrac{2}{3}\approx 0{,}66$. Le joueur peut espérer gagner 0,66 centimes d'Euros par jeu : celui-ci lui est légèrement favorable.

32. Vie et mort de bactéries, concours Geipi, juin 2001

Préambule : Soit t un entier positif. À l'instant t une bactérie vit dans un milieu de culture.

À l'instant suivant, $t+1$, cette bactérie peut

* mourir avec une probabilité $\dfrac{1}{4}$,

* continuer à vivre avec une probabilité $\frac{1}{4}$,

* se diviser en deux bactéries identiques avec une probabilité $\frac{1}{2}$.

<u>Partie A</u>

On suppose dans cette partie, qu'à l'instant t, il y a deux bactéries b_1 et b_2 dans le milieu de culture, chacune se comportant de la même façon, décrite dans le préambule, et indépendamment l'une de l'autre.

On appelle X le nombre total de bactéries à l'instant suivant $t+1$.

1. Compléter le tableau donné, à l'aide du nombre n de bactéries restantes à l'instant $t+1$ et de la probabilité p de l'événement correspondant.

n = nombre de bactéries à $t+1$						
p = probabilité qu'il y ait n bactéries à $t+1$						

2. Quelles sont les valeurs possibles prises par X ¿

3. a. Décrire, à l'aide d'une phrase, l'événement { $X = 2$ }.

b. Justifier que la probabilité de l'événement { $X = 2$ } est égale à $P(X=2)=\frac{5}{16}$.

<u>Partie B</u>

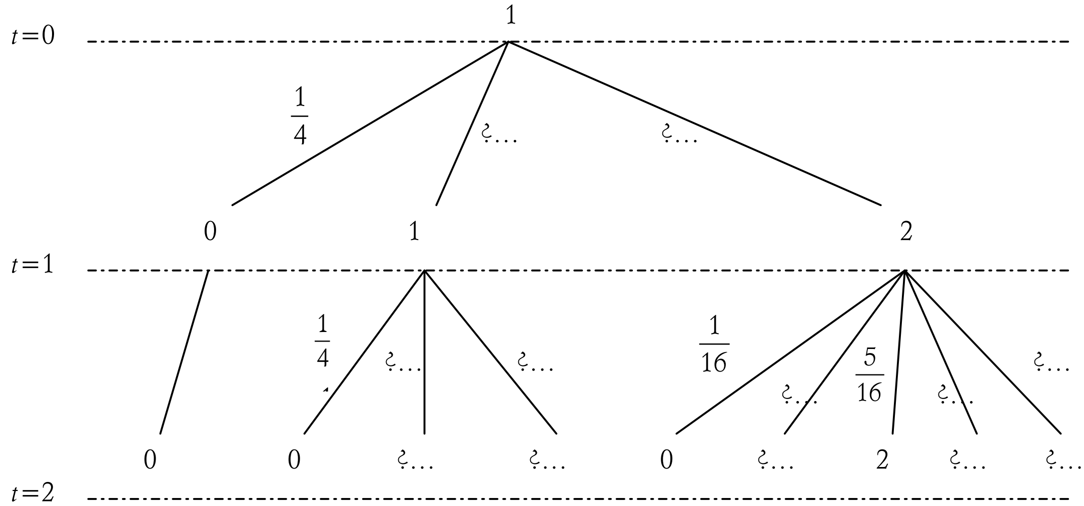
On suppose dans cette partie qu'à l'instant 0 il y a une seule bactérie dans le milieu de culture, qui se comporte comme décrit dans le préambule.

Ensuite, si à l'instant 1 il y a des bactéries, elles se comportent à l'instant suivant comme la bactérie initiale et ceci indépendamment les unes des autres.

Si à un instant il n'y a plus de bactérie le processus d'évolution s'arrête.

On se propose d'étudier le nombre de bactéries à l'instant 2.

1. Compléter l'arbre donnant toutes les possibilités pour le nombre de bactéries aux instants 1 et 2. Donner sur chaque branche de l'arbre la probabilité correspondante.



2. On désigne par A_1, l'événement « *à l'instant 1 il y a une bactérie* » et par B_2 l'événement « *à l'instant 2 il y a deux bactéries* ».

a. Donner la probabilité $P_{A_1}(B_2)$ qu'il y ait deux bactéries à l'instant 2 sachant qu'il y avait une bactérie à l'instant 1.

b. Calculer la probabilité $P(A_1 \cap B_2)$ qu'il y ait une bactérie à l'instant 1 et deux bactéries à l'instant 2.

3. On désigne par A_2 l'événement « *à l'instant 1 il y a deux bactéries* ».

a. Donner la probabilité $P_{A_2}(B_2)$ qu'il y ait deux bactéries à l'instant 2 sachant qu'il y avait deux bactéries à l'instant 1.

b. Calculer la probabilité $P(A_2 \cap B_2)$ qu'il y ait deux bactéries à l'instant 1 et deux bactéries à l'instant 2.

4. Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre de bactéries à l'instant 2.

a. Quelles sont les valeurs que peut prendre Y ?

b. Calculer la probabilité de l'événement $\{ Y = 2 \}$.

c. Calculer la probabilité de l'événement $\{ Y = 0 \}$.

d. Faire un tableau donnant la loi de probabilité de Y.

e. Calculer l'espérance $E(Y)$ de Y.

Correction

Résumons les probabilités données dans l'énoncé :

état	meurt	vit	division
p	1/4	1/4	1/2

Partie A

1. Complétons le tableau suivant :

$t+1$	b_1 vit	b_1 meurt	b_1 se divise	total
b_2 vit	$\frac{1}{4}.\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}.\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}.\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
b_2 meurt	$\frac{1}{4}.\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}.\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}.\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
b_2 se divise	$\frac{1}{2}.\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}.\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
total	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

Qui nous permet simplement de compléter celui demandé : il y aura donc les probabilités suivantes :

0 bactéries si les deux meurent : $\frac{1}{16}$;

1 bactérie si b_1 meurt et b_2 vit ou le contraire : $\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$;

2 bactéries si b_1 vit et b_2 vit ou b_1 se divise et b_2 meurt ou le contraire : $\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{5}{16}$;

3 bactéries si b_1 vit et b_2 se divise ou le contraire : $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$;

4 bactéries si b_1 se divise et b_2 se divise : $\frac{1}{4}$.

n=nombre de bactéries à $t+1$		0	1	2	3	4	total
p=probabilité qu'il y ait n bactéries à $t+1$		$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

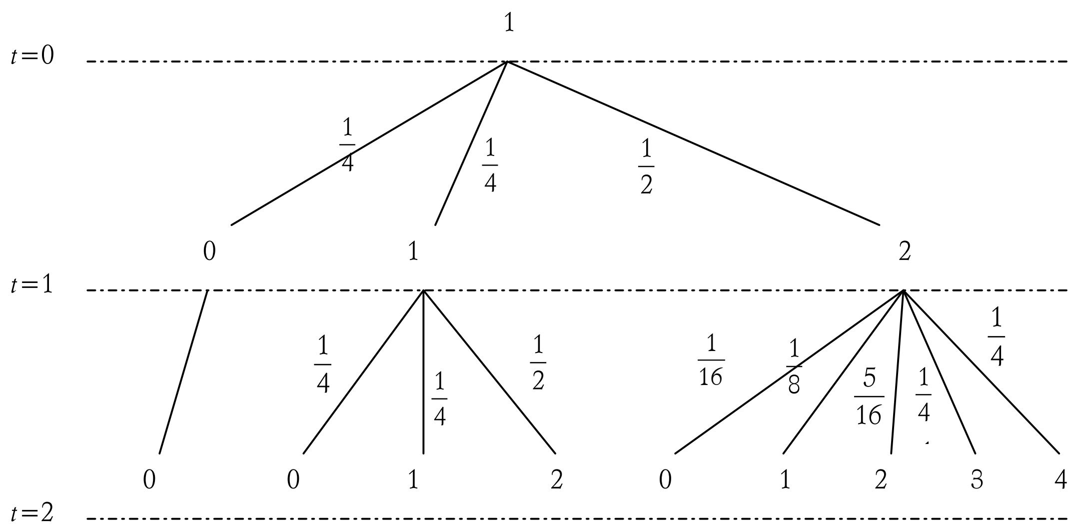
2. X peut donc prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 ou 4.

3. a. L'événement $\{X = 2\}$ signifie qu'il y a deux bactérie à l'instant $t+1$.

b. $P\{X = 2\}$ = probabilité que b_1 vit et b_2 vit ou b_1 se divise et b_2 meurt ou le contraire $=\frac{1}{4}.\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.\frac{1}{4}+\frac{1}{4}.\frac{1}{2}=\frac{1+2+2}{16}=\frac{5}{16}$.

Partie B

1. Pratiquement toutes les réponses de l'arbre sont connues puisque s'il y a 1 bactérie à l'instant 1 on est dans la situation de l'énoncé et s'il y en a 2 on est dans la situation de la partie A :



2. a. $P_{A_1}(B_2)$ est la probabilité qu'il y ait 2 bactéries à l'instant 2 sachant qu'il y en a 1 à l'instant 1 : on est sur la branche 1-1-2 de l'arbre mais on ne s'intéresse qu'à ce qui se passe entre $t=1$ et $t=2$: $P_{A_1}(B_2)=\frac{1}{2}$.

b. $P(A_1 \cap B_2)=P_{A_1}(B_2)\times P(A_1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$; en fait on multiplie les probabilités de chaque bout de branche de l'arbre.

3. a. $P_{A_2}(B_2)$ = probabilité de la branche 1-2-2 limitée au deuxième segment = $\frac{5}{16}$.

b. $P(A_2 \cap B_2)=P_{A_2}(B_2)\times P(A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{16}=\frac{5}{32}$.

4. a. Y peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 ou 4 comme X.

b. $P(\{\ Y = 2\ \})= P(A_1 \cap B_2) + P(A_2 \cap B_2) =\frac{1}{8}+\frac{5}{32}=\frac{9}{32}$.

c. $P(\{\ Y = 0\ \})=\frac{1}{4}.1+\frac{1}{4}.\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.\frac{1}{16}=\frac{11}{32}$.

d. Loi de probabilité de Y :

Y=nombre de bactéries à t=2	0	1	2	3	4	total
P=probabilité qu'il y ait Y bactéries à t=2	$\frac{11}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{4}{32}$	1

e. $E(Y)=0.\frac{11}{32}+1.\frac{4}{32}+2.\frac{9}{32}+3.\frac{4}{32}+4.\frac{4}{32}=\frac{50}{32}=\frac{25}{16}=1,5625$.

33. Erreurs d'impression, Am. du Sud, sept 1999

5 points

Un appareil électronique envoie à une imprimante un code qui est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre ne pouvant prendre que les valeurs 0 ou 1 (par exemple : 1011).

1. a. Combien l'appareil peut-il fabriquer de codes distincts ?

On supposera dans ce qui suit que tous ces codes ont la même probabilité d'être produits.

b. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de 1 figurant dans le code. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2. Une imprimante a été choisie au hasard dans une série.

À la suite d'études antérieures, on a observé cinq cas possibles. Dans le cas E_0, l'imprimante n'écrit que des 0, quel que soit le code émis par l'appareil. Pour chaque élément n de l'ensemble {1, 2, 3}, dans le cas E_n l'imprimante écrit correctement les n premiers caractères du code et n'écrit ensuite que des 0.

Par exemple, lorsque E_2 survient, tous les codes commençant par 01 sont imprimés 0100. Dans le cas E_4, l'imprimante fonctionne correctement.

L'état de l'imprimante sera donc considéré comme le résultat d'une épreuve aléatoire ayant cinq issues possibles E_0, E_1, E_2, E_3, E_4.

On admet que, pour chaque élément n de l'ensemble {0, 1, 2, 3}, $P(E_n)=32\times10^{-3}$. Le code émis par l'appareil est indépendant de l'état de l'imprimante.

a. Calculer la probabilité $P(E_4)$. Pour la suite, C désigne l'évènement : « le code imprimé est identique à celui émis par l'appareil ».

b. On suppose que E_0 se produit. Quelle est la probabilité $P_{E_0}(C)$ que le code imprimé soit quand même celui que l'appareil a envoyé ? En déduire la probabilité $P(C\cap E_0)$.

c. Déterminer de même $P_{E_n}(C)$ puis $P(C\cap E_n)$ pour tout élément n de l'ensemble {1, 2, 3, 4}.

En déduire P(C).

d. Si le code imprimé est exactement celui émis par l'appareil, quelle est la probabilité que E_2 se soit produit ?

Correction

1. a. Il y a deux possibilités pour chaque chiffre, soit $2^4=16$.

b. X peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 ou 4. La loi de X est une loi binomiale $B\left(4,\frac{1}{2}\right)$. Son espérance est $np=4.\frac{1}{2}=2$.

2. $P(E_n)=32\times10^{-3}$.

a. $P(E_4)=1-\sum_{n=0}^{3}P(E_n)=1-4\times32\times10^{-3}\approx0,872$.

b. Si E_0 s'est produit, l'imprimante n'a marqué que des 0, il fallait donc que l'appareil envoie la séquence 0000 : $P_{E_0}(C)=\frac{1}{16}$. On en déduit $P(C\cap E_0)=P_{E_0}(C)\times P(E_0)=\frac{1}{16}\times0,032=0,002$.

c. On résume les résultats dans un tableau.

n	Séquences correctes	$P_{E_n}(C)$	$P(C \cap E_n)$
0	0000	$\frac{1}{16}$	0,002
1	0000, 1000	$\frac{2}{16}$	0,004
2	0000, 1000, 0100, 1100	$\frac{4}{16}$	0,008
3	0000, 1000, 0100, 1100, 0010, 0110, 1010, 1110	$\frac{8}{16}$	0,0016
4	0000, …., 1111	$\frac{16}{16}$	0,872

$P(C) = \sum_{n=0}^{4} P(C \cap E_n) = 0,002 + 0,004 + 0,008 + 0,016 + 0,872 = 0,902$.

d. On cherche $P_C(E_2) = \frac{P(C \cap E_2)}{P(C)} = \frac{0,008}{0,902} \approx 0,0089$.

34. Contrôle de chaudières, Antilles juin 02

4 points

Pour entretenir en bon état de fonctionnement ses installations de chauffage, une société immobilière fait contrôler les chaudières de son parc de logements pendant l'été.

On sait que 20 % des chaudières sont sous garantie.

Parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\frac{1}{100}$.

Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\frac{1}{10}$.

On appelle G l'événement : « la chaudière est sous garantie » ;

on appelle D l'événement : « la chaudière est défectueuse ».

1. Calculer la probabilité des évènement suivants :

   A : « la chaudière est garantie et est défectueuse » ;

   B : « la chaudière est défectueuse ».

2. Dans un logement la chaudière est défectueuse. Montrer que la probabilité qu'elle soit sous garantie est de $\frac{1}{41}$.

3. Le contrôle est gratuit si la chaudière est sous garantie.

Il coûte 80 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et n'est pas défectueuse.

Il coûte 280 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et est défectueuse.

On note X la variable aléatoire qui représente le coût du contrôle d'une chaudière. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

4. Au cours de la période de contrôle, on a trouvé 5 chaudières défectueuses. Quelle est la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles soit sous garantie ?

<u>Correction</u>

1. Le texte donne $p(G) = 0,2$, $p_G(D) = 0,01$ et $p_{\overline{G}}(D) = 0,1$.

$p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{G} \cap \mathrm{D}) = p(\mathrm{G}) \times p_{\mathrm{G}}(\mathrm{D}) = 0{,}2 \times 0{,}01 = 0{,}002$;

$p(\mathrm{D}) = p(\mathrm{G} \cap \mathrm{D}) + p(\overline{\mathrm{G}} \cap \mathrm{D}) = p(\mathrm{G}) \times p_{\mathrm{G}}(\mathrm{D}) + p(\overline{\mathrm{G}}) \times p_{\overline{\mathrm{G}}}(\mathrm{D}) = 0{,}002 + 0{,}8 \times 0{,}1 = 0{,}082$.

2. On cherche $p_{\mathrm{D}}(\mathrm{G}) = \dfrac{p(\mathrm{D} \cap \mathrm{G})}{p(\mathrm{D})} = \dfrac{0{,}002}{0{,}082} = \dfrac{2}{82} = \dfrac{1}{41}$.

3. X peut prendre les valeurs 0, 80 ou 280 ;

$p(X = 0) = p(\mathrm{G}) = 0{,}2$;

$p(X = 80) = p(\overline{\mathrm{G}} \cap \overline{\mathrm{D}}) = p(\overline{\mathrm{G}}) p_{\overline{\mathrm{G}}}(\overline{\mathrm{D}}) = 0{,}8 \times (1 - 0{,}1) = 0{,}72$;

$p(X = 280) = p(\overline{\mathrm{G}} \cap \mathrm{D}) = p(\overline{\mathrm{G}}) p_{\overline{\mathrm{G}}}(\mathrm{D}) = 0{,}8 \times 0{,}1 = 0{,}08$.

$\mathrm{E}(X) = 0{,}2 \times 0 + 0{,}72 \times 80 + 0{,}08 \times 280 = 80$.

4. Soit N le nombre de chaudières sous garantie parmi les chaudières défectueuses : N suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$, $p = p_{\mathrm{D}}(\mathrm{G}) = \dfrac{1}{41}$.

La probabilité cherchée est

$$p(N \geq 1) = 1 - p(N = 0) = 1 - \binom{5}{0} p^0 (1-p)^5 = 1 - \left(1 - \frac{1}{41}\right)^5 = 1 - \left(\frac{40}{41}\right)^5 \approx 0{,}116.$$

35. Clefs et portes, Pondichéry, juin 2000

4 points

Un professeur se trouve en possession de 5 clefs de salles. Il se tient devant une porte et il sait que, parmi ses 5 clefs, 2 n'ouvrent pas la porte parce qu'elles sont défectueuses mais les autres le peuvent. Il veut alors les tester toutes, une à une.

Le choix des clefs est effectué au hasard et sans remise.

On appelle clef numéro x la clef utilisée au x-ième essai.

1. On appelle D_1 l'évènement : « La clef numéro 1 n'ouvre pas la porte ». Calculer sa probabilité.

2. On appelle D_2 l'évènement : « La clef numéro 2 n'ouvre pas la porte ». Calculer la probabilité que l'évènement D_2 se réalise, sachant que l'évènement D_1 est réalisé.

En déduire la probabilité de l'évènement $\mathrm{D}_1 \cap \mathrm{D}_2$. On pourra, pour la suite de l'exercice, s'aider d'un arbre pondéré.

3. Quelle est la probabilité de l'événement : « Les clefs numéros 1 et 2 ouvrent la porte et la clef numéro 3 ne l'ouvre pas » ?

4. Pour $1 \leq i < j \leq 5$, on note $(i\ ;\ j)$ l'événement : « Les clefs qui n'ouvrent pas la porte sont les clefs numéros i et j », et $P(i\ ;\ j)$ la probabilité de cet évènement.

a. Calculer $P(2\ ;\ 4)$.

b. Calculer $P(4\ ;\ 5)$.

<u>Correction</u>

1. Comme 2 clefs n'ouvrent pas sur les 5, $P(\mathrm{D}_1) = \dfrac{2}{5}$.

2. Il reste alors 4 clefs dont 1 n'ouvre pas : $P_{\mathrm{D}_1}(\mathrm{D}_2) = \dfrac{1}{4}$. $P(\mathrm{D}_1 \cap \mathrm{D}_2) = P(\mathrm{D}_1) P_{\mathrm{D}_1}(\mathrm{D}_2) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{10}$.

3. On cherche $P(\overline{\mathrm{D}_1} \cap \overline{\mathrm{D}_2} \cap \mathrm{D}_3) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{2}{3}$.

4. a. & b.

(O, N) = (3, 2)	Ouvre (2, 2)	N'ouvre pas (2, 1)	Ouvre (1, 1)	N'ouvre pas (1, 0)	Ouvre (0, 0)
Probabilité	3/5	2/4	2/3	1/2	1/1
(O, N) = (3, 2)	Ouvre (2, 2)	Ouvre (1, 2)	Ouvre (0, 2)	N'ouvre pas (0, 1)	N'ouvre pas (0, 0)
Probabilité	3/5	2/4	1/3	2/2	1/1

Soit les probabilités : $P(2\,;4)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{12}{120}$ et $P(4\,;5)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{12}{120}$.

36. Boules, Centres étrangers, juin 2000

5 points

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes et on donnera les réponses sous forme de fractions.

Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges, et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément au hasard 3 boules de l'urne.

a. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

E_1 : « Les boules sont toutes de couleurs différentes. »

E_2 : « Les boules sont toutes de la même couleur. »

b. On appelle X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules bleues tirées.

Établir la loi de probabilité de X.

Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

On procède cette fois de la façon suivante : on tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

On effectue ainsi k tirages successifs.

Quelle est la valeur minimale de k pour que la probabilité de ne tirer que des boules bleues soit au moins mille fois plus grande que la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?

Correction

Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges, et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.

1. Nombre de possibilités : $\binom{11}{3}=\frac{11.10.9}{3.2.1}=165$.

a. E_1 : « Les boules sont toutes de couleurs différentes » : on tire 3 parmi les bleues ou 3 parmi les rouges, soit $P(E_1)=\frac{\binom{6}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{165}=\frac{6.3.2}{165}=\frac{36}{165}$.

E_2 : « Les boules sont toutes de la même couleur » : on tire une boule parmi chaque couleur : $P(E_2)=\frac{\binom{6}{3}+\binom{3}{3}}{165}=\frac{20+1}{165}=\frac{21}{165}$.

b. X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 ou 3 : $P(X=k)=\frac{\binom{6}{k}\binom{5}{3-k}}{165}$.

Les calculs donnent : $E(X)=0.\frac{10}{165}+1.\frac{60}{165}+2.\frac{75}{165}+3.\frac{20}{165}=\frac{270}{165}\approx 1{,}64$.

2. Il s'agit pour les bleues comme pour les rouges de lois binomiales donnant la probabilité de tirer m boules d'une couleur donnée sur k tirages ; pour les bleues : $B\left(k, \frac{6}{11}\right)$, $P(k \text{ bleues}) = \left(\frac{6}{11}\right)^k$, et pour les rouges : $B\left(k, \frac{3}{11}\right)$, $P(k \text{ rouges}) = \left(\frac{3}{11}\right)^k$; il faut donc résoudre $\left(\frac{6}{11}\right)^k \geq 1000\left(\frac{3}{11}\right)^k \Leftrightarrow 2^k \geq 1000 \Leftrightarrow k \geq 10$.

37. Cinéma, Antilles, juin 2000

4 points

Un groupe de vingt-deux personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B.

Le premier samedi, huit personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le film B.

Le deuxième samedi, quatre personnes décident de revoir le film A, deux vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.

Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe. On considère les évènements suivants :

A_1 « la personne interrogée a vu le film A le premier samedi » ;

A_2 « la personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi » ;

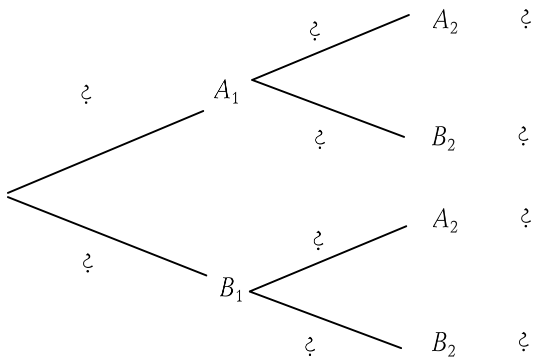
B_1 « la personne interrogée a vu le film B le premier samedi » ;

B_2 « la personne interrogée a vu le film B le deuxième samedi ».

1. a. Calculer les probabilités suivantes : $p(A_1)$ et $p(A_2)$.

b. Calculer les probabilités de chacun des évènements suivants : $p_{A_1}(A_2)$, $p_{B_1}(A_2)$ *et* $p(A_1 \cap A_2)$.

c. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



d. Retrouver à partir de l'arbre pondéré que $p(A_2) = \frac{8}{11}$.

2. Le prix du billet pour le film A est de 30 F et de 20 F pour le film B.

On appelle X la variable aléatoire égale au coût total, pour la personne interrogée, des deux séances de cinéma.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Correction

	A	B	Total
Samedi 1	8	14	22
Samedi 2	4 (A)+12 (B)	2 (B) +4 (A)	22
Total	24	20	44

1. a. $p(A_1)=\frac{8}{22}=\frac{4}{11}$; $p(A_2)=\frac{16}{22}=\frac{8}{11}$.

b. $p_{A_1}(A_2)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, $p_{B_1}(A_2)=\frac{12}{14}=\frac{6}{7}$, $p(A_1\cap A_2)=p(A_1)p_{A_1}(A_2)=\frac{4}{11}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{11}$.

c.

	A_2 sachant A_1 : 4/8	A_2 et A_1 : 2/11
A_1 : 8/22=4/11		
	B_2 sachant A_1 : 4/8	B_2 et A_1 : 2/11
	A_2 sachant B_1 : 12/14	A_2 et B_1 : 6/11
B_1 : 14/22=7/11		
	B_2 sachant B_1 : 2/14	B_2 et B_1 : 1/11

d. $p(A_2)=p(A_1\cap A_2)+p(B_1\cap A_2)=\frac{2}{11}+\frac{6}{11}=\frac{8}{11}$.

2. a. X peut prendre les valeurs 40, 50 ou 60 F.

X	40 (B, B)	50 (A, B) ou (B, A)	60 (A, A)
P_X	$\frac{1}{11}$	$\frac{6}{11}+\frac{2}{11}=\frac{8}{11}$	$\frac{2}{11}$

b. $E(X)=40\times\frac{1}{11}+50\times\frac{8}{11}+60\times\frac{2}{11}=\frac{560}{11}$.

38. Boules et fonction, Liban, juin 2000

6 points

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes, et 2 vertes.

Dans les questions 1 et 2 on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne.

Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit les évènements suivants :

A « Les trois boules sont rouges. »

B « Les trois boules sont de lamême couleur. »

C « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente. »

a. Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.

b. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues.

Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$.

2. Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc $n+5$ boules, c'est-à-dire, n rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les évènements suivants :

D « Tirer deux boules rouges. »

E « Tirer deux boules de la même couleur. »

a. Montrer que la probabilité de l'événement D est $p(D)=\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

b. Calculer la probabilité $p(E)$ de l'évènement E en fonction de n.

Pour quelles valeurs de n a-t-on $p(E)\geq\frac{1}{2}$?

Correction

1. Nombre de possibilités : $\binom{10}{3}=\frac{10.9.8}{3.2.1}=120$.

a. $p(A)=\frac{\binom{5}{3}}{120}=\frac{1}{12}$, $p(B)=\frac{\binom{5}{3}+\binom{3}{3}}{120}=\frac{11}{120}$, $p(C)=\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{120}=\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$.

b. X peut prendre les valeurs 1, 2 ou 3 : $p(X=1)=p(B)=\frac{11}{120}$; $p(X=3)=p(C)=\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$ et $p(X=2)=1-p(X=1)-p(X=3)=1-\frac{11}{120}-\frac{30}{120}=\frac{79}{120}$.

$E(X)=1.\frac{11}{120}+2.\frac{79}{120}+3.\frac{30}{120}=\frac{259}{120}\approx 2{,}16$.

2. a. Nombre de tirages possibles : $\binom{n+5}{2}=\frac{(n+5)(n+4)}{2}$. Nombre de tirages possibles pour D : $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$. Après simplification on a $p(D)=\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

b. E = 2 rouges ou 2 jaunes ou 2 vertes, soit $\binom{n}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}=\frac{n(n-1)}{2}+3+1=\frac{n^2-n+8}{2}$ d'où

$$p(E)=\frac{n^2-n+8}{(n+5)(n+4)}=\frac{n^2-n+8}{n^2+9n+20}.$$

On a $p(E)\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{n^2-n+8}{n^2+9n+20}\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2n^2-2n+16\geq n^2+9n+20\Leftrightarrow n^2-11n-4\geq 0$. Après résolution on a $n\geq 11{,}35$, soit n = 12.

39. Jetons+VA, Polynésie, juin 2000

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :

4 jetons blancs marqués 0 ;
3 jetons rouges marqués 7 ;
2 jetons blancs marqués 2 ;
1 jeton rouge marqué 5.

1. On tire simultanément 4 jetons du sac. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. On suppose que tous les tirages sont équiprobables, et on considère les évènements suivants :

A : « Les quatre numéros sont identiques ».
B : « Avec les jetons tirés, on peut former le nombre 2000 ».
C : « Tous les jetons sont blancs ».
D : « Tous les jetons sont de lamême couleur ».
E : « Au moins un jeton porte un numéro différent des autres ».

a. Montrer que la probabilité de l'évènement B est $\frac{4}{105}$.

b. Calculer la probabilité des évènements A, C, D, E.

c. On suppose que l'évènement C est réalisé, calculer alors la probabilité de l'évènement B.

3. On établit la règle de jeu suivante :

- Si le joueur peut former 5 000, il gagne 75 F.
- Si le joueur peut former le nombre 7 000, il gagne 50 F.
- Si le joueur peut former le nombre 2 000, il gagne 20 F.
- Si le joueur peut former le nombre 0 000, il perd 25 F.
- Pour tous les autres tirages, il perd 5 F.

G est la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Établir la loi de probabilité de G et calculer l'espérance mathématique de G.

Correction

1. Nombre de tirages possibles : $\binom{10}{4}=\frac{10.9.8.7}{4.3.2.1}=210$.

2. a. Pour faire 2000 il faut tirer 1 blanc n°2 parmi 2 et 3 blancs n°0 parmi 4, soit 8 possibilités. La probabilité de l'évènement B est $p(B)=\frac{8}{210}=\frac{4}{105}$.

b. A : 4 blancs 0 parmi 4 : $p(A)=\frac{1}{210}$; C : 4 blancs parmi 6, soit $p(C)=\frac{\binom{6}{4}}{210}=\frac{\binom{6}{2}}{210}=\frac{15}{210}=\frac{1}{14}$;

D : 4 blancs parmi 6 ou 4 rouges parmi 4, soit $p(D)=\frac{15}{210}+\frac{1}{210}=\frac{16}{210}=\frac{8}{105}$;

E : événement contraire : tous les jetons ont le même numéro, soit A ; $p(E)=1-p(A)=\frac{209}{210}$.

c. Le fait que C soit réalisé limite les tirages possibles à 15 ; on a alors $p_C(B)=\frac{8}{15}$.

3.

G	-25	-5	20	50	75
p_G	$\frac{1}{210}$	$\frac{210-1-8-12-4}{210}=\frac{185}{210}$	$\frac{8}{210}$	$\frac{3\times 4}{210}=\frac{12}{210}$	$\frac{1\times 4}{210}=\frac{4}{210}$

$E(G)=-25\frac{1}{210}-5\frac{185}{210}+20\frac{8}{210}+50\frac{12}{210}+75\frac{4}{210}=\frac{110}{210}\approx 0,52$.

40. Promenades familliales, Liban juin 2001

4 points

Dans un village de vacances situé en montagne deux familles A et B disposent de cinq circuits balisés de promenades c_1, c_2, c_3, c_4, c_5.

Partie A

Chaque matin, chacune des familles tire au hasard, indépendamment l'une de l'autre, un des cinq circuits.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles pour l'ensemble des deux familles ?

2. Quelle est la probabilité pour qu'elles fassent le même jour, le même circuit ?

3. Quelle est la probabilité pour que pendant n jours consécutifs, elles ne se trouvent jamais sur le même circuit ?

4. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité de se trouver au moins une fois sur le même circuit est supérieure ou égale à 0,9.

Partie B

On considère dans cette partie deux jours consécutifs. Le deuxième jour chaque famille élimine de son tirage le circuit qu'elle a fait la veille. Il reste donc quatre circuits pour chacune des deux familles.

On note :

E l'évènement « les deux familles font le même circuit le premier jour ».

F l'évènement « les deux familles font le même circuit le deuxième jour ».

Calculer les probabilités suivantes : P(E) , $P_E(F)$, $P_{\overline{E}}(F)$ puis $P(F \cap E)$ et $P(F \cap \overline{E})$. En déduire P(F).

Correction

Partie A

1. La famille A a 5 choix de même que la famille B, il y a 25 tirages possibles.

2. Si on appelle (a, b) un tirage, il y a 5 choix possibles pour *a* et si on veut le même pour *b*, il n'y a qu'un choix, soit 5.1=5. La probabilité est donc $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

3. Soit X le nombre de jours où les deux familles font le même circuit, X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{5}$; elles ne se trouveront jamais sur le même circuit si $X = 0$: $p(X = 0) = (1 - p)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

4. La probabilité de se trouver au moins une fois sur le même circuit est $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n$;

on résoud donc $1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n \geq 0,9 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^n \leq 0,1 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln(4/5)} \approx 10,32$: on a donc $n = 11$.

Partie B

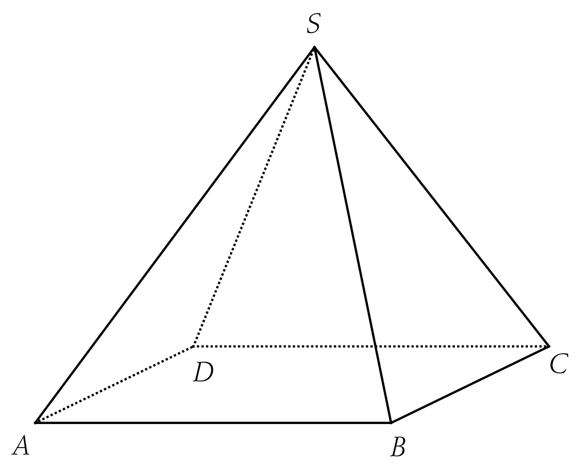
$P(E) = \frac{1}{5}$; $P_E(F) = \frac{1}{4}$; $P(F \cap E) = P_E(F) \times P(E) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$.

Pour $P_{\overline{E}}(F)$ comme elles ont toutes les deux éliminé un circuit différent, elles ne peuvent se retrouver que sur les 3 restants, donc $P_{\overline{E}}(F) = \frac{1}{3}$; on en tire $P(F \cap \overline{E}) = P_{\overline{E}}(F) \times P(\overline{E}) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$.

$P(F) = P(F \cap \overline{E}) + P(F \cap E) = \frac{4}{15} + \frac{1}{20} = \frac{19}{60}$.

41. Fourmis markoviennes, Antilles, sept 2000

4 points



1. Une fourmi se déplace sur les arêtes de la pyramide ABCDS. Depuis un sommet quelconque, elle se dirige au hasard (on suppose qu'il y a équiprobabilité) vers un sommet voisin ; on dit qu'elle « fait un pas ».

a. La fourmi se trouve en A.

Après avoir fait deux pas, quelle est la probabilité qu'elle soit :

- en A ?
- en B ?
- en C ?
- en D ?

b. Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note S_n l'évènement « la fourmi est au sommet S après n pas » et p_n la probabilité de cet évènement. Donner p_1.

En remarquant que $S_{n+1} = S_{n+1} \cap \overline{S_n}$, montrer que $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$.

2. On considère la suite (p_n), définie pour tout nombre entier n strictement positif par : $\begin{cases} p_1 = \frac{1}{3} \\ p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n) \end{cases}$.

a. Montrer par récurrence que, pout tout entier naturel n strictement positif, on a $p_n = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

b. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

Correction

1. a. A un sommet comme A, B, C ou D la fourmi a $\frac{1}{3}$ d'aller sur un autre sommet ; en S elle a $\frac{1}{4}$ d'aller sur un autre sommet.

On a donc la probabilité de revenir en A : $P(\text{ABA, ADA,ASA}) = 2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{11}{36}$.

La probabilité d'aller en B : $P(\text{ASB}) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

La probabilité d'aller en C : $P(\text{ABC, ADC, ASC}) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{7}{36}$.

La probabilité d'aller en D : $P(\text{ASD}) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

b. $p_1 = \frac{1}{3}$. $p_{n+1} = P(\text{aller en S})\times P(\text{pas en S au pas } n) = \frac{1}{3}P\left(\overline{S_n}\right) = \frac{1}{3}(1 - p_n)$.

2. a. $p_1 = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^1\right) = \frac{1}{4}\times\frac{4}{3} = \frac{1}{3}$, ok.

$p_{n+1} = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$. ok également.

b. Comme $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, le terme $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ tend vers 0 donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{4}$.

42. Adéquation à une loi équirépartie

Une ***loi équirépartie*** est une loi uniforme d'une variable aléatoire X qui peut prendre n valeurs de telle sorte que la probabilité soit la même pour chacune de ces n valeurs.

Problème

Un joueur veut vérifier si le dé qu'il possède est « normal », c'est-à-dire bien équilibré.

On sait que, dans ce cas-là, la loi de probabilité associée est la loi uniforme :

$$P(\{1\})=P(\{2\})=P(\{3\})=P(\{4\})=P(\{5\})=P(\{6\})=\frac{1}{6}.$$

Pour cela, le joueur lance 200 fois le dé et note les résultats obtenus :

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	31	38	40	32	28	31
f_i	0,155	0,190	0,200	0,160	0,140	0,155

Pour savoir si la distribution de fréquences obtenue est « proche » de la loi uniforme, on calcule la quantité suivante, qui prend en compte l'écart existant entre chaque fréquence trouvée et la probabilité théorique attendue :

$$d^2=\left(0,155-\frac{1}{6}\right)^2+\left(0,19-\frac{1}{6}\right)^2+\left(0,2-\frac{1}{6}\right)^2+\left(0,16-\frac{1}{6}\right)^2+\left(0,14-\frac{1}{6}\right)^2+\left(0,155-\frac{1}{6}\right)^2\approx 0,00268.$$

Mais rien ne permet de dire pour l'instant si cette quantité trouvée est « petite » ou « grande ». En effet, elle est soumise à la fluctuation d'échantillonnage, puisque sa valeur varie d'une série de lancers à l'autre. On va donc étudier cette fluctuation d'échantillonnage pour convenir d'un seuil entre « petite » et « grande » valeur de d^2 lorsqu'on lance 200 fois un dé. Pour cela, on génère des séries de 200 chiffres au hasard pris dans $\{1;2;3;4;5;6\}$. Les résultats trouvés pour le nombre d^2 à partir de 1 000 simulations sont résumés par le tableau suivant :

Minimum	D_1	Q_1	Médiane	Q_3	D_9	Maximum
0,00363	0,00138	0,00233	0,00363	0,00555	0,00789	0,01658

Le **neuvième décile** de la série des valeurs simulées de d^2 est 0,00789.

Cela signifie que 90 % des valeurs de d^2 obtenues au cours de ces 1 000 simulations sont dans l'intervalle [0 ; 0,00789]. Comme la valeur observée de d^2 est inférieure à cette valeur seuil de 0,00789, on peut convenir que le dé est équilibré avec un risque de 10 %.

En effet, en utilisant cette méthode sur les données simulées, on se serait trompé dans 10 % des cas. On dit que l'on a un **seuil de confiance** de 90 %.

Exercices

I / Dans une maternité, on a noté pendant un an l'heure de chaque naissance. Les nombres de naissances entre 0 h et 1 h, entre 1 h et 2 h, …, sont respectivement 96, 126, 130, 125, 124, 129, 115, 89, 118, 97, 95, 108, 98, 97, 109, 95, 115, 108, 90, 104, 103, 112, 113, 128.

1. Tester, au seuil de risque de 10 %, si une naissance se produit avec la même probabilité dans l'une des 24 heures.

2. Au cours de 2 000 simulations de cette expérience, on a calculé le nombre d^2, somme des carrés des écarts entre les fréquences observées et les fréquences théoriques. Voici les résultats pour la série statistique des valeurs de $10^4 . d^2$:

Minimum	D_1	Q_1	Médiane	Q_3	D_9	Maximum
0,6	16,9	23,2	25,8	32,1	36,5	61

II / On veut tester si une pièce de monnaie est truquée ou non. Pour cela, on la lance 100 fois. On obtient 59 fois « pile » et 41 fois « face ». Au seuil de risque 10 %, peut-on dire que cette pièce est truquée ?

Au cours de 1 000 simulations de cette expérience, on a calculé le nombre d^2, somme des carrés des écarts entre les fréquences observées et les fréquences théoriques. Voici les résultats pour la série statistique des valeurs de d^2 :

Minimum	D_1	Q_1	Médiane	Q_3	D_9	Maximum
0,002	0,003	0,005	0,008	0,011	0,013	0,014