

Droites, Plans de l'Espace – Exercices

Exercice 1

1. Exercice résolu :

Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, E , F et G sont les ensembles de points M dont les coordonnées $(x ; y ; z)$ sont telles que respectivement : $2x + 5 = 0$; $3x - y = 0$ et $y = z$. Quelle est la nature de chacun de ces ensembles ?

a. Pour commencer, on doit garder à l'esprit que dans l'espace, les équations $x = k$; $ax + by + d = 0 \dots$ sont des équations de plans et non de droites.

b. Ensemble E des points M tels que : $2x + 5 = 0$.

$2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$. E est donc le plan parallèle à (yOz) et passant par $A\left(-\frac{5}{2} ; 0 ; 0\right)$.

c. Ensembles F de points M tels que $3x - y = 0$

L'équation $3x - y = 0$ est de la forme $ax + by + d = 0$. F est donc le plan parallèle à (Oz) et passant par les points $B(1 ; 3 ; 0)$ et O .

d. Ensemble G des points M tels que $y = z$.

$y = z \Leftrightarrow y - z = 0$ équation de la forme $by + cz + d = 0$. G est donc le plan parallèle à (Ox) et passant par les points $C(0 ; 1 ; 1)$ et O .

2. A vous !

$\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$ sont les ensembles de points M dont les coordonnées $(x ; y ; z)$ sont telles que respectivement :

$5 = y$ $2x - z = 4$ $y = x$ Quelle est la nature de chacun de ces trois ensembles ?

Exercice 2

Pour chacune des équations suivantes, préciser si le plan $\mathcal{P}$ associé est parallèle à un axe du repère ou à un plan de base de $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, et si oui, préciser lequel.

a. $z + 2 = 0$

b. $2x + y = 2(x + y) - 1$

c. $x - 3y = 2(x + y) + 1$

d. $x - y = 2x - z - 2$

e. $\frac{y}{2} + \frac{z}{5} = 1$

f. $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = \sqrt{12}$

Exercice 3

$ABCDEFGH$ est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.

Déterminer les équations des plans :

a. (ABD)

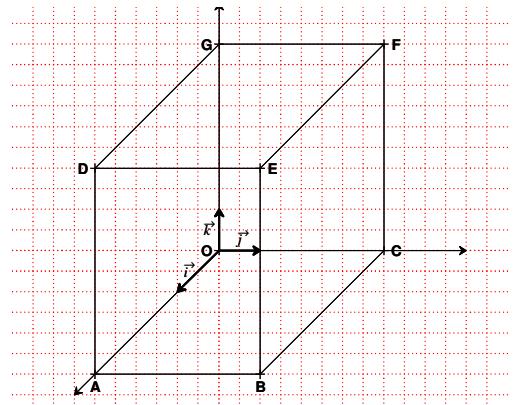
b. (BCE)

c. (DEF)

f. (ACF)

d. (OCF)

e. (BCG)



Exercice 4

Dans un repère orthonormal, $\mathcal{P}$ est le plan d'équation $2x + 3y - 5z - 3 = 0$.

1. Vérifier que le point $M(0 ; 1 ; 0)$ appartient à $\mathcal{P}$.
2. Calculer la cote du point de $\mathcal{P}$ d'abscisse 3 et d'ordonnée 1.
3. Déterminer les coordonnées de deux points de $\mathcal{P}$ de cote 4.

Exercice 5

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x + 3y + 4z + 1 = 0$. Le point $A(1 ; 1 ; -1)$ appartient-il à $\mathcal{P}$? Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{P}$ et des trois axes.

Exercice 6

Soit m un réel et $\mathcal{P}_m$ le plan d'équation $mx + (m - 1)y + (m + 2)z + 1 - 2m = 0$. Déterminer si possible m pour que $\mathcal{P}_m$:

a. passe par O .

b. passe par $A(1 ; 1 ; 0)$

c. soit parallèle à (Ox)

d. soit parallèle à (Oz) .

Exercice 7

Vérifier que les trois points ne sont pas alignés puis donner une équation du plan (ABC) dans chacun des cas suivants :

- a. $A(3 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 1 ; 0)$ et $C(0 ; 0 ; -2)$ b. $A(1 ; 3 ; 2)$, $B(2 ; 0 ; 1)$ et $C(0 ; 0 ; 1)$

Exercice 8

1. Les plans d'équations $2x + 4y - 6z + 1 = 0$ et $x + 2y - 3z - 5 = 0$ sont-ils parallèles ?
2. Les plans d'équations $3x - 6y + 9z + 2 = 0$ et $-x + 3y - 3z - 1 = 0$ sont-ils parallèles ?
3. Déterminer le réel k pour que les plans d'équations $kx + (k+6)y + 2z - 1 = 0$ et $3x + ky - 2z + 2 = 0$ soient parallèles.
4. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x - 2y + z + 3 = 0$. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par O .
5. Soit $\mathcal{O}$ le plan d'équation $x + 3y - 2z + 1 = 0$. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par $A(1 ; 1 ; 2)$.

Exercice 9

Pour chacune des équations de plan suivantes, donner les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n}$ à ce plan :

- a. $3x + 2y + 3z - 1 = 0$ b. $x - 2y + 2z - 1 = 0$ c. $x + z = 0$

Exercice 10

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $4x - 2y + 3z - 1 = 0$ et le point $A(1 ; 3 ; 1)$.

1. Vérifier que A appartient au plan $\mathcal{P}$.
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à ce plan.
3. Déterminer les coordonnées d'un point B situé sur la droite orthogonale en A à $\mathcal{P}$.

Exercice 11

Soit les points $A(1 ; 2 ; -1)$ et $B(3 ; 5 ; 2)$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ orthogonal en A à la droite (AB) .

Exercice 12

Soit les points $A(0 ; 2 ; 1)$, $B(2 ; 1 ; 3)$ et $C(4 ; 3 ; -1)$. Déterminer une équation du plan passant par A et orthogonal à la droite (BC) .

Exercice 13

Dans chacun des cas suivants, le système définit-il une droite ? Justifier.

$$\begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 4x - 2y - 2z - 3 = 0 \\ -2x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Exercice 14

Soit les points $A(0 ; -2 ; 1)$ et $B(4 ; -2 ; -3)$ et la droite $\mathcal{D}$ de système d'équations $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y + z - 3 = 0 \end{cases}$.

Vérifier que $\mathcal{D}$ passe par A et démontrer que $\mathcal{D} = (AB)$.

Exercice 15

Soit $\mathcal{D}$ la droite de système d'équations $\begin{cases} 2x + z - 7 = 0 \\ x - 2z + 4 = 0 \end{cases}$.

1. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle à (Oy) .
2. Déterminer le point d'intersection A de $\mathcal{D}$ avec le plan (xOz) .
3. Placer le point A dans un système d'axes et dessiner $\mathcal{D}$.

Exercice 16

Soit $\mathcal{D}$ la droite de système d'équations $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 3x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$.

1. Déterminer les points d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ avec les trois plans de base.
2. Placer ces trois points dans un repère et dessiner la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 17

Dans chacun des cas suivants, donner un système d'équations de la droite (AB) .

- a. $A(2 ; -1 ; 0)$ et $B(3 ; 1 ; -1)$
- b. $A(0 ; 2 ; -1)$ et $B(1 ; 4 ; 2)$
- c. $A(2 ; -2 ; 0)$ et $B(-1 ; 2 ; 5)$

Exercice 18 : TD avec géospace

Une fabrique de meubles réalise trois modèles d'armoires.

Le premier modèle nécessite pour sa réalisation 30 heures d'ébénisterie et 20 heures de décoration.

Le deuxième modèle nécessite 20 heures d'ébénisterie et 20 heures de décoration.

Le troisième modèle dit "à décorer", nécessite simplement 20 heures d'ébénisterie.

Chaque semaine, 400 heures au plus peuvent être consacrées à l'ébénisterie et 240 heures à la décoration.

A. Le système des contraintes.

On note x le nombre d'armoires du premier modèle fabriquées dans une semaine, y celui du deuxième modèle, et z celui du troisième modèle.

Montrez que les entiers x , y et z satisfont au système (S) d'inéquations suivant :

$$(S) \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ 3x + 2y + 2z \leq 40 \\ x + y \leq 12 \end{cases}$$

B. Un polyèdre des contraintes

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant un repère orthonormal, à chaque triplet $(x ; y ; z)$, on associe le point M de coordonnées $(x ; y ; z)$.

A l'aide de géospace, on veut représenter l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(x ; y ; z)$ tels que $(x ; y ; z)$ satisfait au système (S) .

Pour cela :

- représenter les plans d'équations $x + y = 12$ et $3x + 2y + 2z = 40$.
- représenter l'intersection de ces deux plans.

Donner alors certains triplets $(x ; y ; z)$ satisfaisants aux contraintes de l'énoncé...

C. Bénéfice : une famille de plans parallèles.

L'entreprise réalise un bénéfice de 1000€ sur le premier modèle, de 1500€ sur le deuxième modèle et de 500€ sur le troisième modèle.

On se propose de déterminer le nombre d'armoires de chaque modèle que l'entreprise doit fabriquer par semaine pour pouvoir réaliser un bénéfice maximal.

1. Expliquez pourquoi le bénéfice hebdomadaire réalisé par cette entreprise est donné par la formule :
 $b = 500(2x + 3y + z)$
2. Notons Q_b le plan d'équation $2x + 3y + z - \frac{b}{500} = 0$, et A_b le point d'intersection de Q_b et de l'axe $(O, \vec{k})$.

A l'aide de géospace,

- (a) Créer la variable numérique b dans l'intervalle $[0 ; 30000]$, puis représenter le plan Q_b .
- (b) En pilotant la variable b au clavier, que pouvez vous conjecturer quant aux différents plans Q_b .
Justifier votre conjecture.
- (c) Justifier que plus b est grand, plus la cote de A_b est grande...

3.

- (a) Conjecturer la valeur maximale du bénéfice.
- (b) En supposant vraie la conjecture faite ci-dessus, retrouver par le calcul cette valeur maximale du bénéfice ainsi que les quantités d'armoires de chaque modèle