Suites : Exercices

EXERCICE 1

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
1. On donne : $u_5 = 7$, $r = 2$.
Calculer u_1, u_{25} et u_{100}.
2. On donne : $u_3 = 12$, $u_8 = 0$.
Calculer r, u_0 et u_{18}.
3. On donne : $u_7 = \frac{7}{2}$, $u_{13} = \frac{13}{2}$.
Calculer u_0.

EXERCICE 2

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison q.
1. On donne : $u_1 = 3$ et $q = -2$.
Calculer u_4, u_8 et u_{12}.
2. On donne $u_3 = 2$ et $u_7 = 18$.
Calculer u_0, u_{15} et u_{20}.

EXERCICE 3

(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_2 + u_3 + u_4 = 15$ et $u_6 = 20$.
Calculer son premier terme u_0 et sa raison r.

EXERCICE 4

Déterminer sept nombres impairs consécutifs dont la somme est 7^3.

EXERCICE 5

Existe-t-il une suite telle que les trois premiers termes u_0, u_1, u_2 soient à la fois en progression arithmétique et géométrique ?

EXERCICE 6

Soit (u_n) une suite telle que $u_4 = -4$ et $u_7 = \frac{1}{2}$.
1. On suppose que la suite (u_n) est arithmétique.

a) Calculer u_3, u_5, u_0.
Plus généralement, exprimer u_n en fonction de u_p et de la raison r, pour n et p entiers quelconques.
b) Calculer S_5 et S_{10}.
c) Etudier la convergence de (u_n).

2. Mêmes questions si (u_n) est supposée géométrique.

EXERCICE 7

Une suite arithmétique u de raison 5 est telle que $u_0 = 2$ et, n étant un nombre entier, $\sum_{i=3}^{i=n} u_i = 6456$.
Calculer n.

EXERCICE 8

Déterminer quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique sachant que leur somme est 12 et la somme de leurs carrés est 116.

EXERCICE 9

Une suite géométrique v est croissante et ses termes sont strictement négatifs.
1. Justifier que la raison b de la suite est telle que 0 < b < 1.
2. On suppose que $v_1 v_3 = \frac{4}{9}$ et $v_1 + v_2 + v_3 = -\frac{19}{9}$.
Calculer v_1, v_2, v_3 et b.

EXERCICE 10

Calculer les sommes S et S'.
S = 2 + 6 + 18 + ... + 118 098

$$S' = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{2}{59049}$$

EXERCICE 11

Une horloge sonne toutes les heures.
Quel est le nombre de sons de cloche entendus en 24 heures ?

EXERCICE 12

Cinq personnes se trouvent dans une pièce. L'une d'entre elles remarque que leurs âges sont en progression arithmétique. Sachant que la somme des carrés de leurs âges est égale à l'année où se passe cette histoire (à savoir 1980) et qu'à elles toutes, les personnes totalisent 90 années, quel est l'âge de chacune des personnes ?

EXERCICE 13

La taille d'un nénuphar double chaque jour. Au bout de 40 jours, il a recouvert tout l'étang. Au bout de combien de jours avait-il recouvert la moitié de l'étang ?

EXERCICE 14

Au cours d'une bourse aux livres, un manuel scolaire perd chaque année 12% de sa valeur. Un livre a été acheté neuf en 1985, il coûtait alors 150F. Quel est son prix à la bourse aux livres de 1990 ? de 1995 ?

EXERCICE 15

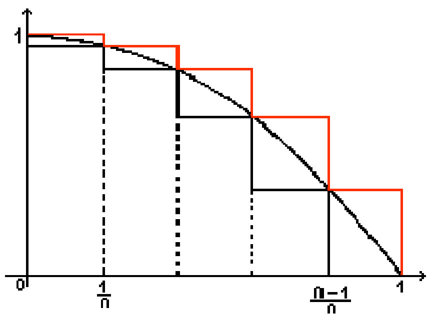
On cherche à calculer l'aire A de la surface comprise entre la portion de parabole d'équation $y = -x^2 + 1$ et les axes du repère (voir figure).
Pour cela, on divise [0,1] en n parties égales et l'on remarque que A est comprise entre l'aire A_n de la région délimitée en noir et l'aire A'_n de la région délimitée en rouge.

a) Calculer A_n et A'_n en fonction de n.

(On admettra la formule : $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

b) Calculer A_n et A'_n pour $n = 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^{10}$ à l'aide d'une calculatrice.
Quel résultat semble se dégager ?

c) Prouver ce résultat et en déduire la valeur de A.



CORRECTION

EXERCICE 1

Rappels :

Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.
Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tous entiers naturels n et p, $u_n = u_p + (n-p)r$

1. On a :
$u_5 = u_1 + (5 - 1)r$, donc $u_1 = u_5 - 4r = 7 - 4 \times 2 = 7 - 8 = -1$
Donc : $\mathbf{u_1 = -1}$

$u_{25} = u_5 + (25 - 5)r = 7 + 20 \times 2 = 7 + 40 = 47$
Donc : $\mathbf{u_{25} = 47}$

$u_{100} = u_5 + (100 - 5)r = 7 + 95 \times 2 = 7 + 190 = 197$
Donc : $\mathbf{u_{100} = 197}$

2. On a :
$u_8 = u_3 + (8 - 3)r = u_3 + 5r$, donc : $0 = 12 + 5r$
soit : $\mathbf{r} = -\frac{12}{5}$

$u_3 = u_0 + 3r$, donc $u_0 = u_3 - 3r = 12 - 3 \times -\frac{12}{5} = \frac{60}{5} + \frac{36}{5} = \frac{96}{5}$
Donc : $\mathbf{u_0} = \frac{96}{5}$

$u_{18} = u_0 + 18r = \frac{96}{5} + 18 \times \left(-\frac{12}{5}\right) = \frac{96}{5} - \frac{216}{5} = -\frac{120}{5} = -24$
Donc : $\mathbf{u_{18} = -24}$

3. On a :
$u_7 = u_0 + 7r$, donc $r = \frac{u_7 - u_0}{7}$
De plus, $u_{13} = u_0 + 13r$, donc $u_{13} = u_0 + 13 \times \frac{u_7 - u_0}{7}$, donc :
$7u_{13} = 7u_0 + 13(u_7 - u_0)$
$7u_{13} = 7\,u_0 + 13u_1 - 13u_0$
$7u_{13} = -6u_0 + 13u_7$

$$u_0 = \frac{7u_{13} - 13u_7}{-6} = \frac{7 \times \frac{13}{2} - 13 \times \frac{7}{2}}{-6}$$
Donc : $\mathbf{u_0 = 0}$

EXERCICE 2

Rappels :
Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0q^n$
Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors pour tous entiers naturels n et p, $u_n = u_p\, q^{n-p}$

1. On a :
$u_4 = u_1\, q^{4-1} = u_1\, q^3 = 3 \times (-2)^3 = 3 \times (-8) = -24$
Donc : $\mathbf{u_4 = -24}$

$u_8 = u_1\, q^{8-7} = u_1\, q^7 = 3 \times (-2)^7 = 3 \times (-128) = -384$
Donc : $\mathbf{u_8 = -384}$

$u_{12} = u_1\, q^{12-1} = u_1\, q^{11} = 3 \times (-2)^{11} = 3 \times (-2\,048) = -6\,144$
Donc : $\mathbf{u_{12} = -6\,144}$

2. Déterminons q :

$u_7 = u_3 q^4$, donc $q^4 = \frac{u_7}{u_3} = \frac{18}{2} = 9$.

Donc q² = 3. On a alors deux possibilités pour la raison q : $q = -\sqrt{3}$ ou $q = \sqrt{3}$.

► Si $q = -\sqrt{3}$, alors :

$u_3 = u_0 q^3$, donc $u_0 = \frac{u_3}{q^3} = \frac{2}{(-\sqrt{3})^3}$

$u_0 = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$

$u_{15} = u_0 q^{15} =$

$= -\frac{2\sqrt{3}}{9} \times 3^7 \times 3^7 \times (-\sqrt{3})$

$= \frac{2 \times 3 \times 3^7}{3^2}$

$= 2 \times 3^6 = 1\ 458$

$u_{20} = u_0 q^{20} =$

$= -\frac{2\sqrt{3} \times 3^{10}}{3^2} = -2\sqrt{3} \times 3^8 = -13\ 122\sqrt{3}$

Donc : si $q = -\sqrt{3}$, alors $u_0 = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$, $u_{15} = 1\ 458$ et $u_{15} = -13\,122\sqrt{3}$

► Si $q = \sqrt{3}$, alors :

$u_3 = u_0 q^3$, donc $u_0 =$

$u_{15} = u_0 q^{15} =$

$= \frac{2\sqrt{3}}{9} \times 3^7 \times 3^7 \times \sqrt{3}$

$= \frac{2 \times 3 \times 3^7}{3^2}$

$= 2 \times 3^6 = 1\ 458$

$u_{20} = u_0 q^{20} =$

$= \frac{2\sqrt{3} \times 3^{10}}{3^2} = 2\sqrt{3} \times 3^8 = 13\ 122\sqrt{3}$

Donc : si $q = \sqrt{3}$, alors $u_0 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$, $u_{15} = 1\ 458$ et $u_{15} = 13\,122\sqrt{3}$

EXERCICE 3

(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, donc :

$u_2 = u_0 + 2r$, $u_3 = u_0 + 3r$, $u_4 = u_0 + 4r$ et $u_6 = u_0 + 6r$.

On obtient alors le système suivant :

$$\iff \begin{cases} u_0 = -10 \\ r = 5 \end{cases}$$

D'où : $u_0 = -10$ et $r = 5$.

Pour tout entier naturel n, $u_n = -10 + 5n$.

EXERCICE 4

Déterminons sept nombres impairs consécutifs dont la somme est 7^3 :
La suite des impairs peut être notée: $u_n = 2n + 1$, pour tout entier n.
On cherche donc l'entier p (et u_p) tel que : $u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + ... + u_{p+6} = 7^3 = 343$.
Or, $u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_{p+6} = (2p + 1) + (2p + 3) + ... + (2p + 13) = 7 \times 2p + (1 + 3 + 5 + ... + 13.$
Or, $1 + 3 + 5 + ... + 13 = 7\left(1 + \frac{6 \times 2}{2}\right) = 49$, somme des 7 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2.
Ainsi : $14p + 49 = 7^3 = 343$, soit $p = 21$; puis $u_p = 43$.
D'où : les sept nombres recherchés sont : 43, 45, 47, 49, 51, 53 et 55.

EXERCICE 5

Déterminons s'il existe une suite telle que les trois premiers termes u_0, u_1, u_2 soient à la fois en progression arithmétique et géométrique :
Si ces trois termes sont en progression arithmétique, alors il existe un réel r tel que : $u_1 = u_0 + r$ et $u_2 = u_1 + r$.
De même, s'ils sont en progression géométrique, alors il existe un réel q non nul tel que : $u_1 = u_0q$ et $u_2 = u_1q^2$.
On obtient alors le système à deux équations et deux inconnues suivant :

$\begin{cases} u_0 \times q = u_0 + r \\ u_0 \times q^2 = u_0 + 2r \end{cases}$ ou encore: $\begin{cases} u_0(q-1) = r \\ \dfrac{u_0(q^2-1)}{2} = r \end{cases}$

Résolvons l'équation $q - 1 = \dfrac{q^2 - 1}{2}$:
$2q - 2 = q^2 - 1$
$q^2 - 2q + 1 = 0$
$(q - 1)^2 = 0$
$q = 1$
Cette équation admet une unique solution 1.
Donc : $u_0 = u_1 = u_2$
D'où : les seules suites dont les trois premiers termes sont en progression géométriques et arithmétiques sont les suites constantes.

EXERCICE 6

1. a) $u_7 = u_4 + 3r$, la raison r vaut donc : $r = \dfrac{3}{2} = 1.5$
Donc : $u_3 = -5{,}5$; $u_5 = -2{,}5$; $u_0 = -10$.

$u_n = u_p + \dfrac{3(n-p)}{2}$.

1. b) $S_5 = u_0 + u_1 + ... + u_5 = 6\left[u_0 + \dfrac{5r}{2}\right] = -\dfrac{75}{2}$

$S_{10} = u_0 + u_1 + ... + u_{10} = 11\left[u_0 + \dfrac{10r}{2}\right] = -\dfrac{55}{2}$

1. c) (u_n) est une suite arithmétique de raison positive, donc elle converge vers l'infini.

2. $u_7 = u_4 q^3$; soit $q^3 = \frac{u_7}{u_4} = -\frac{1}{8}$; on en déduit $q = -\frac{1}{2}$. Puis $u_3 = 8$; $u_5 = 2$; $u_0 = -64$; $u_n = \frac{u_p}{(-2)^{n-p}}$.

$S_5 = u_0 \times \frac{1-q^6}{1-q} = 42$ et $S_{10} = u_0 \times \frac{1-q^{11}}{1-q} = \frac{341}{8} = 42.625$.

(u_n) est une suite géométrique de raison $|q| < 1$, donc elle converge vers 0.

EXERCICE 7

$S_n = u_3 + ... + u_n = (n-2)\left[u_3 + \frac{(n-3)r}{2}\right]$, $u_3 = 2 + 3 \times 5 = 17$

On cherche donc n tel que : $(n-2)\left(17 + \frac{5(n-3)}{2}\right) = 6456$; soit encore : $(n - 2)(5n + 19) = 12\,912$. Il faut donc trouver les racines du polynôme $5n^2 + 9n - 12950 = 0$:

$n_1 = \frac{-9-509}{10} = 51.8$ qui n'est pas un entier ! et $n_2 = \frac{-9+509}{10} = 50$

EXERCICE 8

Soit (u_n) une telle suite de premier terme u_0 et de raison r.

Il existe k tel que : $u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} = 12$ et $u_k^2 + u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 + u_{k+3}^2 = 116$

Or : $u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} = 4u_k + 6r$

et $u_k^2 + u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 + u_{k+3}^2 = u_k^2 + (u_k + r)^2 + (u_k + 2r)^2 + (u_k + 3r)^2$

Or $4u_k + 6r = 12$ donc $2u_k + 3r = 6$

Ainsi : $6^2 + 5r^2 = 116$

Soit : $r = \pm 4$

Puis $2u_k + 3r = 6$ donc $u_k = -3$ ou $u_k = 9$

Ainsi : -3 , 1 , 5 , 9 conviennent ainsi que : 9 , 5 , 1 , -3.

EXERCICE 9

Si (v_n) est une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison b, alors pour tout entier n : $v_n = v_0 b^n$.

1. Si (v_n) est croissante et ses termes sont strictement négatifs alors $0 < \frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$, c'est-à-dire $0 < b < 1$.

2. $v_1 v_3 = v_1^2 b^2$ et $v_1 + v_2 + v_3 = v_1 \frac{1-b^3}{1-b}$; $1 - b^3 = (1 - b)(1 + b + b^2)$

On obtient donc le système :

soit encore :

Soit $6b^2 + 25b + 6 = 0$ ou $6b^2 - 13b + 6 = 0$

La première équation a deux solutions négatives (cf première questions)

Donc $q = \frac{2}{3}$.

$v_1 = -1$; $v_2 = -\frac{2}{3}$; $v_3 = -\frac{4}{9}$.

EXERCICE 10

S = 2 + 6 + 18 + ... + 118 098

S est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 3.

$u_0 = 2$; $u_1 = 2 \times 3$; $u_2 = 2 \times 3^2$ ... 118 098 = 2 × 59 049 = 2×3^{10}.

$$S = u_0 + u_1 + ... + u_10 = u_0 \frac{1-3^{11}}{1-3} = 177\ 146.$$

$$S' = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + ... + \frac{2}{59049}$$

S' est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison $\frac{1}{3}$.

De plus : $59049 = 3^{10}$. Donc $S' = 2\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{177\ 146}{59\ 049}$.

EXERCICE 11

1 + 2 + 3 + ... + 12 + 1 + 2 + ... + 12 = 2(1 + 2 + ... + 12).

Somme des 12 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1 : $1 + 2 + ... + 12 = \frac{12 \times 13}{2} = 78$

Donc en 24 heures la pendule aura sonné (2 × 78) fois, soit **156 fois**.

EXERCICE 12

Soit u_0 l'âge de la plus jeune personne. L'âge des autres personnes sont respectivement : u_1, u_2, u_3 et u_4 ; avec $u_1 = u_0 + r$, ...

On a donc :

$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1980$ et $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 90$

Pour la résolution, cf exercice 8 : 6 ans, 12 ans, 18 ans, 24 ans et 30 ans.

EXERCICE 13

Soit u_0 la taille du nénuphar le jour 0. Au bout d'un jour il mesure $u_1 = 2u_0$, ... ; au bout de 40 jours il mesure $u_{40} = u_0 2^{40}$.

On cherche l'entier p tel que $u_p = u_0 \times 2^p = \frac{u_{40}}{2}$.

On obtient facilement p = 39.

EXERCICE 14

En 1985 le prix du livre est $u_0 = 150$. En 1986 il vaut : $u_1 = 150 \times 0{,}88$, ... ; en 1990 (donc 5 ans après), il vaut : $u_5 = 150 \times 0{,}88^5 = 79{,}2$ F.
Et en 1995, il ne vaut plus que : $u_{10} = 150 \times 0{,}88^{10} = 41{,}8$ F.

EXERCICE 15

a) An, l'aire inférieure, est délimitée par des rectangles de largeur $\frac{1}{n}$ et de longueur $f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Donc : $A_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + ... + f(1)\right]$

$f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + ... + f(1) = n - \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2}{n^2}$

Ainsi $A_n = \frac{1}{n}\left[n - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right] = 1 - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{4n^2 - 3n - 1}{6n^2}$

c) pour tout n, $A_n < A < A'_n$.

Et quand n tend vers l'infini, A_n et A'_n tendent vers $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; donc $A = \frac{2}{3}$.