EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES
EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin(3x)=\frac{1}{2}$ $\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ $\cos(2x)=\sin(3x)$

Exercice n°2.

1) Exprimer $\cos a \cos b$ en fonction de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$
2) En effectuant un changement de variable que l'on précisera, démontrez que pour tous nombres réels p et q, on a : $\cos p+\cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
3) En déduire les solutions de l'équation $\cos x+\cos 2x+\cos 3x = 0$

Exercice n°3.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^3+3x-\frac{1}{2}$

1) Faire une étude complète de la fonction f (limites, sens de variation, etc…), dressez son tableau de variations, et tracez sa courbe représentative C dans un repère orthonormal (unité de longueur 4 cm)
2) Trouvez les solutions dans $[0;2\pi]$ de l'équation, d'inconnue a $\sin 3a = \frac{1}{2}$. Représentez sur un cercle trigonométrique les points associés à ces solutions
3) Montrez que pour tout nombre réel a, $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$
4) Déduisez de la question 2) les solutions de l'équation $f(x)=0$. Donnez-en des valeurs approchées à 0,1 près

EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES CORRECTION

Exercice n°1

Les équations trigonométriques, qui possèdent en général une infinité de solutions (sauf si on restreint l'intervalle de définition), se résolvent presque exclusivement en utilisant les équivalences suivantes :

$$\cos a=\cos b \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ a=-b+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases} \quad \text{et } \sin a=\sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ a=\pi-b+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases},$$

ainsi qu'à partir de certaines formules de trigonométrie

$\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$	Puisque $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, on a donc $\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ \text{ou } x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$
$\sin(3x)=\frac{1}{2}$	Puisque $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$, on a donc $\sin(3x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin(3x)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $\Leftrightarrow\begin{cases}3x=\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ \text{ou } 3x=\pi-\left(\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\\ \text{ou } x=\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$ **Ne surtout pas oublier de diviser également $2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ par 3 !**
$\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$	$\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ $\Leftrightarrow\begin{cases}3x+\frac{\pi}{4}=x+\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ \text{ou } 3x+\frac{\pi}{4}=-\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ \text{ou } 4x=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\frac{\pi}{12}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ \text{ou } 4x=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{24}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ \text{ou } x=-\frac{7\pi}{48}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$
$\cos(2x)=\sin(3x)$	En utilisant la propriété $\cos\left(\frac{\pi}{2}-X\right)=\sin X$, l'équation devient équivalente à $\cos(2x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\frac{\pi}{2}-3x+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ 2x=-\frac{\pi}{2}+3x+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ -x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{\pi}{2}-2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{\pi}{2}+2k'\pi, k'\in\mathbb{Z}\text{ (avec } k'=-k)\end{cases}$

Exercice n°2

1) Puisque $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$, en additionnant les deux lignes, on obtient $\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos(a)\cos(b)$, c'est-à-dire $\boxed{\cos(a)\cos(b)=\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}}$

2) Si on pose $p = a+b$ et $q = a-b$, on aura, par demi-somme et demi-différence, $a = \dfrac{p+q}{2}$ et $b = \dfrac{p-q}{2}$, de sorte qu'en remplaçant dans l'écriture $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$, on obtiendra $\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2} = \dfrac{\cos p+\cos q}{2}$, c'est-à-dire l'égalité souhaitée $\boxed{\cos p+\cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}}$

3) En appliquant la formule $\cos p+\cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$ aux deux termes extrêmes du membre de gauche de l'équation, on obtient $\cos x+\cos 3x = 2\cos\dfrac{x+3x}{2}\cos\dfrac{x-3x}{2} = 2\cos(2x)\cos(-x) = 2\cos(2x)\cos(x)$

L'équation $\cos x+\cos 2x+\cos 3x = 0$ devient alors équivalente à

$$\cos(2x)+2\cos(2x)\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x)\left[1+2\cos(x)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \quad \text{ou} \quad 1+2\cos(x) = 0$$

La première équation $\cos(2x) = 0$ est équivalente à $2x = \dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \boxed{x = \dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}}$

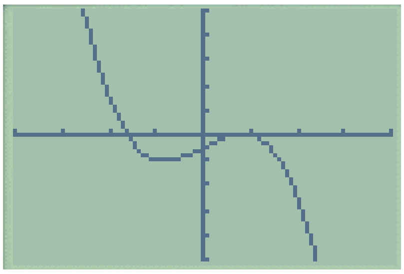
La deuxième équation $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$ est équivalente à $\boxed{x = \pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}}$

Exercice n°3

1) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = -12x^2+3 = 3(1-4x^2) = 3(1-2x)(1+2x)$

On en déduit le signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	$-1{,}5$	↗	$0{,}5$	↘	$-\infty$



(pour les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -4x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -4x^3 = +\infty$

2) L'équation $\sin 3a = \dfrac{1}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ est équivalente à $\begin{cases} 3a = \dfrac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 3a = \dfrac{5\pi}{6}+2l\pi, l\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ a = \dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{2l\pi}{3}, l\in\mathbb{Z} \end{cases}$

Les solutions appartenant à l'intervalle $[0;2\pi]$ sont obtenues pour $k = 0,1,2$ et $l = 0,1,2$. Leurs valeurs rangées dans l'ordre croissant sont $\left\{\dfrac{\pi}{18};\dfrac{5\pi}{18};\dfrac{13\pi}{18};\dfrac{17\pi}{18};\dfrac{25\pi}{18};\dfrac{29\pi}{18};\right\}$

3) Pour tout nombre réel a, $\sin 3a = \sin(a+2a) = \sin(a)\cos(2a)+\sin(2a)\cos(a)$

Puisque par ailleurs $\cos(2a) = 2\cos^2 a-1 = 1-2\sin^2 a$ et puisque $\sin(2a) = 2\sin a\cos a$, on obtient :

$$\sin 3a = \sin(a)(1-2\sin^2 a)+2\sin(a)\cos(a)\cos(a) =$$

$$= \sin(a)-2\sin^3 a+2\sin(a)(\cos a)^2 = \sin(a)-2\sin^3 a+2\sin(a)(1-\sin^2 a)$$

$$= \sin(a)-2\sin^3 a+2\sin(a)-2\sin^3 a \boxed{= -4\sin^3 a+3\sin(a)}$$

EXERCICE4

4) L'équation $f(x)=0$ s'écrivant $-4x^3+3x-\frac{1}{2}=0$, on pose $x=\sin(a)$, et l'équation devient $-4(\sin a)^3+3\sin a=\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, compte tenu de la question 3), $\sin 3a=\frac{1}{2}$

Or la question 2) nous fournit les valeurs de a solutions : $a\in\left\{\frac{\pi}{18};\frac{5\pi}{18};\frac{13\pi}{18};\frac{17\pi}{18};\frac{25\pi}{18};\frac{29\pi}{18};\right\}$

Puisque $x=\sin(a)$, il reste à « extraire » les trois valeurs différentes de sinus. En effet, les réels $\frac{\pi}{18}$ et $\frac{17\pi}{18}$ ont même sinus, puisque $\frac{17\pi}{18}=\pi-\frac{\pi}{18}$, et puisque pour tout α, $\sin(\alpha)=\sin(\pi-\alpha)$. De même, les réels $\frac{5\pi}{18}$ et $\frac{13\pi}{18}$ ont même sinus, ainsi que les réels $\frac{25\pi}{18}$ et $\frac{29\pi}{18}$. Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont donc $x\in\left\{\sin\left(\frac{\pi}{18}\right);\sin\left(\frac{5\pi}{18}\right);\sin\left(\frac{25\pi}{18}\right)\right\}$

La calculatrice fournit $x\approx 0,17$, $x\approx 0,77$ et $x\approx -0,94$ à 0,01 près

Guesmi.B