

EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(3x) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos(2x) = \sin(3x)$$

Exercice n°2.

1) Exprimer $\cos a \cos b$ en fonction de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$

2) En effectuant un changement de variable que l'on précisera, démontrez que pour tous nombres réels p et q , on a :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

3) En déduire les solutions de l'équation $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

Exercice n°3.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -4x^3 + 3x - \frac{1}{2}$

1) Faire une étude complète de la fonction f (limites, sens de variation, etc...), dressez son tableau de variations, et tracez sa courbe représentative C dans un repère orthonormal (unité de longueur 4 cm)

2) Trouvez les solutions dans $[0; 2\pi]$ de l'équation, d'inconnue a $\sin 3a = \frac{1}{2}$. Représentez sur un cercle trigonométrique les points associés à ces solutions

3) Montrez que pour tout nombre réel a , $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$

4) Déduisez de la question 2) les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Donnez-en des valeurs approchées à 0,1 près

Guesmi.B

EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES CORRECTION

Exercice n°1

Les équations trigonométriques, qui possèdent en général une infinité de solutions (sauf si on restreint l'intervalle de définition), se résolvent presque exclusivement en utilisant les équivalences suivantes :

$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ a = -b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{et} \quad \sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ a = \pi - b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases},$$

ainsi qu'à partir de certaines formules de trigonométrie

$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	<p>Puisque $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a donc</p> $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
$\sin(3x) = \frac{1}{2}$	<p>Puisque $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, on a donc</p> $\sin(3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 3x = \pi - \left(\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ <p>Ne surtout pas oublier de diviser également $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ par 3 !</p>
$\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$	$\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{4} = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 3x + \frac{\pi}{4} = -\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 4x = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 4x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{7\pi}{48} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
$\cos(2x) = \sin(3x)$	<p>En utilisant la propriété $\cos\left(\frac{\pi}{2} - X\right) = \sin X$, l'équation devient équivalente à</p> $\cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + 3x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ -x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \text{ (avec } k' = -k) \end{cases}$

Exercice n°2

1) Puisque $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$, en additionnant les deux

lignes, on obtient $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$, c'est-à-dire $\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$

2) Si on pose $p = a+b$ et $q = a-b$, on aura, par demi-somme et demi-différence, $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$, de sorte

qu'en remplaçant dans l'écriture $\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$, on obtiendra

$\cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} = \frac{\cos p + \cos q}{2}$, c'est-à-dire l'égalité souhaitée $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

3) En appliquant la formule $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ aux deux termes extrêmes du membre de gauche de

l'équation, on obtient $\cos x + \cos 3x = 2 \cos \frac{x+3x}{2} \cos \frac{x-3x}{2} = 2 \cos(2x) \cos(-x) = 2 \cos(2x) \cos(x)$

L'équation $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ devient alors équivalente à

$$\cos(2x) + 2 \cos(2x) \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) [1 + 2 \cos(x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \quad \text{ou} \quad 1 + 2 \cos(x) = 0$$

La première équation $\cos(2x) = 0$ est équivalente à $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

La deuxième équation $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ est équivalente à $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Exercice n°3

1) f est définie et dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction polynôme et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -12x^2 + 3 = 3(1 - 4x^2) = 3(1 - 2x)(1 + 2x)$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$-1/2$	$1/2$	$+\infty$			
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		
f	$+\infty$	\searrow	$-1,5$	\nearrow	$0,5$	\searrow	$-\infty$



(pour les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^3 = +\infty$)

2) L'équation $\sin 3a = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ est équivalente à $\begin{cases} 3a = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 3a = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ a = \frac{5\pi}{18} + \frac{2l\pi}{3}, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Les solutions appartenant à l'intervalle $[0; 2\pi]$ sont obtenues pour $k = 0, 1, 2$ et $l = 0, 1, 2$. Leurs valeurs rangées dans

l'ordre croissant sont $\left\{ \frac{\pi}{18}; \frac{5\pi}{18}; \frac{13\pi}{18}; \frac{17\pi}{18}; \frac{25\pi}{18}; \frac{29\pi}{18}; \right\}$

3) Pour tout nombre réel a , $\sin 3a = \sin(a + 2a) = \sin(a)\cos(2a) + \sin(2a)\cos(a)$

Puisque par ailleurs $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$ et puisque $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sin 3a &= \sin(a)(1 - 2\sin^2 a) + 2\sin(a)\cos(a)\cos(a) = \\ &= \sin(a) - 2\sin^3 a + 2\sin(a)(\cos a)^2 = \sin(a) - 2\sin^3 a + 2\sin(a)(1 - \sin^2 a) \\ &= \sin(a) - 2\sin^3 a + 2\sin(a) - 2\sin^3 a = \boxed{-4\sin^3 a + 3\sin(a)}\end{aligned}$$

4) L'équation $f(x) = 0$ s'écrivant $-4x^3 + 3x - \frac{1}{2} = 0$, on pose $x = \sin(a)$, et l'équation devient $-4(\sin a)^3 + 3\sin a = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire, compte tenu de la question 3), $\sin 3a = \frac{1}{2}$

Or la question 2) nous fournit les valeurs de a solutions : $a \in \left\{ \frac{\pi}{18}; \frac{5\pi}{18}; \frac{13\pi}{18}; \frac{17\pi}{18}; \frac{25\pi}{18}; \frac{29\pi}{18}; \right\}$

Puisque $x = \sin(a)$, il reste à « extraire » les trois valeurs différentes de sinus. En effet, les réels $\frac{\pi}{18}$ et $\frac{17\pi}{18}$ ont même sinus, puisque $\frac{17\pi}{18} = \pi - \frac{\pi}{18}$, et puisque pour tout α , $\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$. De même, les réels $\frac{5\pi}{18}$ et $\frac{13\pi}{18}$ ont même sinus, ainsi que les réels $\frac{25\pi}{18}$ et $\frac{29\pi}{18}$. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont donc

$$x \in \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{18}\right); \sin\left(\frac{5\pi}{18}\right); \sin\left(\frac{25\pi}{18}\right) \right\}$$

La calculatrice fournit $x \approx 0,17$, $x \approx 0,77$ et $x \approx -0,94$ à 0,01 près

GUESMI.B