Cours de mathématiques : Equation du second degré

I) Formes de l'équation du second degré.

L'équation du deuxiéme degré à une inconnue est celle où l'inconnue est élévé à la puissance de 2, sans y etre plus élevée; le plus fort exposant de l'inconnue est donc 2.

Aprés la supression des dénominateurs, et toutes réductions faites, cette équation se réduit à trois termes, un terme en x^2, un terme en x et un terme connu. Telle est l'équation :

$3x^2 - 5x = 4$,

ou en plaçant selon l'usage tous les termes dans le premier membre,

$3x^2 - 5x - 4 = 0$.

Une équation du deuxième degré peut aussi ne contenir que 2 termes. Comme sont les équations suivantes :

$3x^2 - 12 = 0$,

$3x^2 - 5x = 0$

II)

Résolution de l' équation à deux termes.

Prenons l' équation composée d' un terme en x^2 et d' un terme connu, par exemple

$3x^2 - 12 = 0$,

ou, ce qui est la même chose,

$3x^2 = 12$.

en divisant d' abord les deux membres par le coefficient de x^2, on a

$x^2 = 4$.

Puisque le carré de l' inconnue est égal à 4, l' inconnue est elle-même égale à la racine de 4, et par conséquent égale à 2. Mais au point de vue algébrique, le nombre négatif -2 multiplié par lui-même donne +4 pour produit, comme +2, donc -2 est aussi bien la racine carré de 4 que +2; c' est ce qu' on écrit ainsi

$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

On l' énonce en disant : x égale plus ou moins 2.

Ainsi tout nombre positif a deux racines carrés, qui sont égales en valeur absolue avec des signes contraires.

Soit résoudre l' équation :

$x^2 - 4 = 0$,

on peut aussi résoudre l' équation en utilisant l' identité remarquable suivante, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$(x - 2)(x +2) = 0$

$x - 2 = 0$ ou $x + 2 = 0$

x = 2 ou x = -2 .

Soit résoudre l' équation :

Prenons maintenant l' équation composée d' un terme en et d' un terme en x, par exemple :

$3x^2 - 5x = 0$.

En mettant x e n facteur commun des deux termes, on a :

$(3x - 5) \times x = 0$.

Les racines des équations sont les valeurs qui, substituées à x, rendront le premiers membre égal à 0. Or si on remplace x par 0, le premier facteur devient égal à -5; et le second facteur étant 0, le premier membre est

-5×0 ou 0;

donc 0 est une racine de l' équation.

Cherchons maintenant la valeur qui, mise à la place de x, rendrait 3x - 5 égal à 0, et pour cela posons

$3x - 5 = 0$.

On en déduit x = 5/3.

Cette valeur 5/3 mise à la place de x annule le premier membre, car il devient alors 0 × 5/3 ou 0; c' est donc une deuxième racine de l' équation.

En résumé, quand l' équation. du deuxième degré ne contient que deux termes, l' un en x^2 et l' autre en x, l' une de ses deux racines est 0. Pour avoir l' autre, on divise l' équation. par x , ce qui donne une équation du premier degré, et c' est en résolvant cette équation qu' on obtient la deuxième racine

III) Calcul des radicaux du deuxième degré.

Avant d' aborder la résolution de l' équation complète, il convient de rappeler quelques règles relatives aux calculs sur les radicaux, afin qu' on ne soit pas embarrassé pour effectuer les opérations qu' exige la détermination des racines.

Pour élever au carré une quantité qui est le produit de plusieurs facteurs, on élève chaque facteur au carré, ce qui revient à doubler les exposants de ces facteurs.

Exemple : $(3\times5^2\times7^3)^2 = (3)^2 \times (5^2)^2 \times (7^3)^2 = 3^2 \times 5^4 \times 7^6$

Réciproquement, pour extraire la racine carrée d' un produit de plusieurs facteurs, on extrait la racine de chaque facteur, ce qui revient à diviser par 2 les exposants des facteurs.

Exemple : $\sqrt{(3^2\times5^4\times7^6)} = \sqrt{(3^2)}\times\sqrt{(5^4)}\times\sqrt{(7^6)} = 3\times5^2\times7^3$.

Si les facteurs du produits ne sont pas des carrés, on se borne à écrire à indiquer leur racine.

Exemple : $\sqrt{(5\times7\times11)} = \sqrt{5}\times\sqrt{7}\times\sqrt{11}$.

Cette égalité lue en sens inverse montre que pour multiplier entre eux plusieurs radicaux, on multiplie entre elles les quantités qui sont sous le signe radical et on met le produit sous un seul signe.

Exemple : $\sqrt{12}\times\sqrt{17} = \sqrt{(12\times17)} = \sqrt{204}$.

Si donc on avait à multiplier la racine carrée de 12 par la racine carrée de 17, il vaudrait mieux multiplier d' abord 12 par 17et extraire ensuite la racine carrée du produit 204.

Lorsque le produit placé sous un radical contient des facteurs qui ne sont pas des carrés parfaits, on peut simplifier néanmoins ce radical. Pour cela, on décompose le produit en deux produits, dont le premier contient tous les facteurs carrés parfaits et le second les autres facteurs; on extrait ensuite la racine carrée du premier de ces deux produits et on indique celle de l' autre.

Exemple : $\sqrt{}(8a^2b^3) = \sqrt{}(4a^2b^2 \times 2b) = 2ab\times\sqrt{}(2b)$

soit $\sqrt{8a^2b^3} = \sqrt{4a^2b^2 \times 2b} = 2ab\sqrt{2b}$.

Pour élever une fraction au carré, on élève ses deux termes au carré.

Exemple : $(3/5)^2 = 3^2/5^2 = 9/25$

soit $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$.

Réciproquement pour extraire une racine carrée d' une fraction, on extrait la racine de chaque terme.

Exemple : $\sqrt{}(36/49) = \sqrt{36}/\sqrt{49} = 6/7$

soit $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$.

Quand le dénominateur n' est pas un carré parfait, il faut toujours dans les calculs numériques rendre d' abord le dénominateur carré parfait, sans altérer la valeur de la fraction; pour cela il suffit de multiplier les deux termes par le dénominateur.

Soit par exemple, à extraire la racine carrée de 7/8. On aura :

$\sqrt{}(7/8) = \sqrt{}(7\times8/8^2) = \sqrt{}(7\times8) / 8 = (\sqrt{7}\times\sqrt{8}) / 8 = 2\sqrt{7}\sqrt{2} / 8$

soit $\sqrt{\frac{7}{8}} = \frac{\sqrt{7\times8}}{\sqrt{8\times8}} = \frac{\sqrt{7}\times\sqrt{8}}{\sqrt{8^2}} = \frac{\sqrt{7}\times\sqrt{2}\times\sqrt{4}}{8} = \frac{\sqrt{7}\times\sqrt{2}\times2}{8} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{7}}{8}$.

ou

$7/(\sqrt{2} - 1) = 7\times(\sqrt{2} + 1)/(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 7\times(\sqrt{2} + 1)/(2 - 1)= 7 + 7\sqrt{2}$

soit $\frac{7}{\sqrt{2}-1} = \frac{7\times\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} = \frac{7\sqrt{2}+7}{2-1} = 7\sqrt{2}+7$.

IV) Résolution de l' équation complète.

Soit l' équation

$3x^2 - 5x -2 = 0$.

Débarrassons d' abord x^2 de son coefficient, en divisant tous les termes de l' équation par 3; nous aurons :

$x^2 - 5x/3 -2/3 = 0$.

Maintenant faisons passer le terme connu dans le second membre, ce qui donne :

$x^2 - 5x/3 = 2/3$.

Pour résoudre cette dernière équation, il faudrait qu' on put extraire exactement la racine carrée de son premier membre, ce qui donnerait une équation du premier degré. Or un binôme n' est jamais un carré parfait; mais le premier terme x^2 étant un carré parfait, il suffit de prendre la moitié du coefficient -5/3 de x, d' en faire le carré et de l' ajouter au premier membre, pour le changer en un trinôme ayant la propriété d' être un carré parfait.

La moitié de -5/3 est -5/6 dont le carré est 25/36.

on ajoute 25/36 au premier membre de l' équation, et pour ne pas modifier l' équation, on l' ajoute aussi au second membre, on obtient ainsi :

$x^2 - 5x/3 + 25/36 = 2/3 + 25/36$.

Pour avoir la racine du trinôme qui forme le premier membre, on prend les racines des deux termes x^2 et 25/36 qui sont des carrés parfaits, et on met entres elles le signe de l' autre terme -5/3x; on indique ensuite à l' aide du signe radical la racine du second membre, en ayant soin de lui donner le double signe ±. On a de cette manière :

$x - 5/6 = \pm \sqrt{(25/36 + 2/3)}$.

Cette équation renferme deux équation du premier degré :

$x - 5/6 = +\sqrt{(25/36 + 2/3)}$

$x - 5/6 = -\sqrt{(25/36 + 2/3)}$.

Mais on laisse habituellement en une seule. En faisant ensuite passer le terme connu du premier membre dans le second membre de l' équation, on obtient :

$x = 5/6 \pm \sqrt{(25/36 + 2/3)}$ soit,

$x = 5/6 \pm \sqrt{(49/36)}$

$x = 5/6 \pm 7/6$.

Si maintenant on distingue les deux racines en désignant la première par x' et la seconde par x", on aura :

$x' = 5/6 + 7/6 = 12/6 = 2$;

$x'' = 5/6 - 7/6 = -2/6 = -1/3$.

On vérifiera en remplaçant dans l' équation proposée x par 2, puis par -1/3, et on verra en effectuant les calculs que pour chacune des ces valeurs le premier membre est réduit à 0.

Remarques :

Soit l' équation $x^2 + px + q = 0$, p le coefficient de x et q le terme connu.

Terme et coefficient qui peuvent être fractionnaire ou entiers, positifs ou négatifs.

Il suffit de pendre la moitiés du coefficient de x, en changeant son signe, de lui ajouter et de lui soustraire la racine carrée du nombre formé par le carré de cette moitié du coefficient de x, suivi de terme connu pris avec un signe contraire.

Les racines seront exprimées par la formule suivante :

$$\mathbf{x = -p/2 \pm \sqrt{(p^2/4 - q)}}$$

ou encore : $x = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

V)

Relation entre les racines et les coefficients

Quand l'équation du second degré a la forme :

$$x^2 + px + q = 0,$$

Le coefficient p est égal à la somme des racines changée du signe, et le terme connu q est égal au produit des deux racines.

En effet, faisons la somme des deux racines

$x' = -p/2 + \sqrt{(p^2/4 - q)}$

$x'' = -p/2 - \sqrt{(p^2/4 - q)}$

nous aurons

$x' + x'' = -p/2 - p/2 + \sqrt{(p^2/4 - q)} - \sqrt{(p^2/4 - q)}$

$$x' + x'' = -p.$$

Pour avoir le produit des racines, observons que la premiere est la somme des deux quantités

$-p/2$ et $\sqrt{(p^2/4 - q)}$

et que la seconde est la différence de ces mêmes quantités;

$x' \times x'' = [-p/2 + \sqrt{(p^2/4 - q)}][-p/2 - \sqrt{(p^2/4 - q)}]$

$x' \times x'' = (-p/2)^2 - (\sqrt{(p^2/4 - q)})^2$

$x' \times x'' = p^2/4 - p^2/4 + q$

$$x' \times x'' = q.$$

Remarque

Ce principe fournit le moyen de former une équation dont les racines sont connues. On veut par exemple former une équation dont les racines sont 4 et -3.

Le premier terme étant toujours x^2, on donnera à x un coefficient égale à la somm 4 + (-3) en changeant son signe, et on predra 4×(-3) pour le terme connu. L'équation cherchée est donc:

$x^2 - x - 12 = 0$

VI)

Discussion des racines.

Discuter des racines, c'est chercher à quels caractères on reconnaît, à la vue des coefficients de l' équation, et sans la résoudre, si ses racines sont réelles ou imaginaires.

Reprenons l' équation générale

$$x^2 + px + q = 0$$

et ses racines

$$x = -p/2 \pm \sqrt{(p^2/4 - q)}$$

ou encore : $x = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

D' abord quelque soit le signe du coefficient p dans l' équation, le terme $p^2/4$, qui le carré de p/2, est toujours un nombre positif.

Supposons q négatif dans l' équation, porté sous le radical avec un signe contraire, il devient positif et s'ajoute à $p^2/4$; dont la quantité placée sous la racine est toujours positive et par la suite les deux racines sont réelles. En outre comme leur produits, qui est égale à q, est négatif, elle sont de signes contraires.

Si q<0 alors il existe deux racines réelles, distintes et de signe contraire.

Supposons que q est positif dans l' équation Dans ce cas, sa valeur doit être retranchée de $p^2/4$ sous le radical. il y a alors 2 cas possible.

Soit q est inferieur à $p^2/4$, alors la quantité placée sous le radical est positive et les racines sont réelles. Elle sont du même signe , puisque le produit est positif; ce signeest contraire à celui du coeeficient p, puisque ce coefficient est égale à la somme des racines changée de signe.

Si q>0 et q<p^2/4 alors il existe deux racines réelles, distintes et même signe.

Si q est égal à $p^2/4$, la valeur du radical se réduit à 0 et les deux racines sont égales à -p/2. Dans ce cas, le trinôme du premier membre de l'équation

$x^2 + px + p^2/4 = 0$

est un carré parfait; c'est le carré de $(x + p/2)^2$.

Si q=p^2/4 alors il existe une seule racine double égale à -p/2.

Si q est plus grand que $p^2/4$, la quantité $(p^2/4 - q)$ est un nombre négatif; par conséquent il n'existe pas de racine réelle.

Si q>p^2/4 alors il n'existe aucune solution réélle à l'équation

VI) Autre méthode de résolution.

On peut résoudre l' équation sans la diviser par le coefficient du carré de l' inconnue, c' est à dire en lui conservant la forme :

$ax^2 + bx + c = 0$

où a,b,c sont des réels connus avec a non nul.

pour cela on a d' abord :

$ax^2 + bx = -c$.

On multiplie tous les termes par 4a, ce qui donne :

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$.

$(2ax)^2 + 2ax \times 2b + b^2 - b^2 = -4ac$ on reconnaît une identité remarquable

$(2ax + b)^2 - b^2 = -4ac$

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$

De là on pose delta la quantité b^2 - 4a; soit $\Delta = b^2 - 4ac$ ***que l' on nomme le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.***

Supposons que Δ soit négatif, or $(2ax + b)^2$ est nécessairement positif, alors il n' existe aucune solution réelle.
Si Δ < 0 alors l' équation n' admet aucune solution réelle.

Supposons que Δ soit nul, alors l' équation devient :

$(2ax + b)^2 = 0$

$2ax + b = 0$

$x = -b/2a.$
Si Δ = 0 alors l' équation admet une solution double x = -b/2a.

Supposons que Δ soit strictement positif, alors l' équation devient

2ax + b = ± √Δ et l' équation admet deux solutions réelles et distinctes suivantes :

x' =(-b + √Δ) / 2a et x' =(-b -√Δ) / 2a.
Si Δ >0 alors l' équation admet deux solutions réelles et distinctes
x' =(-b + √Δ) / 2a et x' =(-b -√Δ) / 2a

ou encore : $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Factorisation d' un trinôme et signe d' un trinôme.

Soit $ax^2 + bx + c$ où a,b,c sont des réels connus avec a non nul. On peut factoriser le trinôme sous la forme suivante :

$ax^2 + bx + c = a [x^2 + bx/a + c/a] = a [x^2 + bx/a + b^2/4a^2 + c/a - b^2/4a^2]$

$= a [x^2 + bx/a + b^2/4a^2 + 4ac/4a^2 - b^2/4a^2]$

$= a [(x + b/2a)^2 + (4ac- b^2) /4a^2]$

$= a [(x + b/2a)^2 - \Delta/4a^2].$

$a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ est appelé la forme canonique du trinome.
Si Δ est strictement négatif alors la quantité $(x + b/2a)^2 - \Delta/4a^2$ est strictement positif pour tout réel x et le trinôme est du signe de a pour tout réel x.
Si Δ est nul alors alors la quantité $(x + b/2a)^2$ est positif pour tout réel x différent de -b/2a et le trinôme est du signe de a pour tout réel x différent de -b/2a..
Si Δ est strictement positif alors le trinôme admet 2 racines et la factorisation suivante :

a [x - (-b - √Δ)/2a] [x - (-b + √Δ)/2a]

ou encore : $a\left[x-\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]\left[x-\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]$.

Le trinôme est du signe de -a à l' intérieur des racines, c' est à dire pour tout x compris entre $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Guesmi.B