1. Division euclidienne.

1.1. Vocabulaire.

Propriété: On se donne a et b deux nombres entiers naturels avec b non nul. Il existe deux nombres entiers q et r tels que: $a = b \times q + r$ et tel que: $0 \leqslant r < b$.

a est appelé le dividende de la division euclidienne de a par b et b est appelé le diviseur de la division euclidienne de a par b.

q est appelé le quotient de la division euclidienne de a par b et r le reste de la division euclidienne de a par b.

Autrement dit, en utilisant la disposition habituelle pour les calculs:

$$\begin{array}{c|c} \text{Dividende} & \text{Diviseur} \\ \cline{2-2} & \text{Quotient} \\ \text{Reste} & \end{array}$$

$$\text{dividende} = \text{diviseur} \times \text{quotient} + \text{reste} \quad \text{avec: } 0 \leqslant \text{reste} < \text{diviseur}$$

Exemple: La division euclidienne de 33 par 7 donne comme quotient 4 et reste 5.

En effet: $33 = 7 \times 4 + 5$.

Pour cela on procède comme suit:

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{370} & \mathbf{17} \\ \cline{2-2} & 2 \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \mathbf{370} & \mathbf{17} \\ \cline{2-2} 34 & 2 \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \mathbf{370} & \mathbf{17} \\ \cline{2-2} -\ \underline{34} & 2 \\ 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \mathbf{370} & \mathbf{17} \\ \cline{2-2} -\ \underline{34} & 2 \\ 30 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \mathbf{370} & \mathbf{17} \\ \cline{2-2} -\ \underline{34} & 21 \\ 30 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 370 & 17 \\ \cline{2-2} \underline{34} & 21 \\ 30 & \\ -\underline{17} & \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 370 & 17 \\ \cline{2-2} \underline{34} & 21 \\ 30 & \\ -\underline{17} & \\ 13 & \end{array}$$

On peut alors conclure en disant que la division euclidienne de 370 par 17 a pour quotient 21 et reste 13.

1.3. Multiples. Critères de divisibilité.

Définition : Lorsque le reste dans la division euclidienne de a par b est nul, on dit que a est un multiple de b ou que a est divisible par b.

Exemples et contre-exemples:

35 est un multiple de 5 car: $35 = 7 \times 5 + 0$

33 n'est pas un multiple de 7, car: $33 = 7 \times 4 + 5$, le reste de la division euclidienne de 33 par 7 est non nul.

Remarque: Les multiples d'un entier sont les produits de cet entier par 0 ; 1 ; 2 ; 3...

Exemple : Les multiples de 11 sont : 0 ; 11 ; 22 ; 33 ; 44 ; 55 ; 66 ; ...

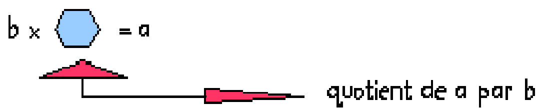
Règle : Un nombre entier est divisible par :

- 2 s'il se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; ou 8.
- 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
- 4 si le nombre formé par les deux derniers chiffres de ce nombre est un multiple de 4.
- 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
- 5 si il se termine par 0 ou 5.
- 10 si il se termine par 0.
- 100 si il se termine par 00.

2. Quotients. Egalités de quotients.

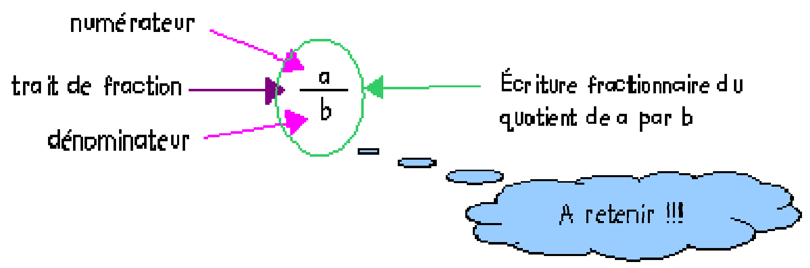
2.1. Quotient de deux nombres.

Définition: Le quotient de a par b (où b est un nombre non nul) est le nombre par lequel il faut multiplier b pour obtenir a.



Notation: Le quotient de a par b se note $\frac{a}{b}$. (On lit « a sur b »), ou, parfois: a:b

$\frac{a}{b}$ est appelé l'écriture fractionnaire du quotient de a par b



Exemple:

Le quotient de 21 par 3 s'écrit $\frac{21}{3}$.

Le quotient de 19 par 28 s'écrit $\frac{19}{28}$.

Définition: Lorsque a et b sont deux nombres entiers (avec b non nul), l'écriture $\frac{a}{b}$ s'appelle une fraction.

Exemples:

$\frac{15}{19}$ est une fraction.

$\frac{1,5}{19}$ n'est pas une fraction: 1,5 n'est pas un nombre entier. $\frac{1,5}{19}$ est simplement l'écriture fractionnaire du quotient de 1,5 par 19.

2.2. Quotients égaux.

Règle: On ne change pas le quotient de a par b, lorsqu'on multiplie ou l'on divise par un même nombre non nul chacun des nombres a et b.

Autrement dit:

$$\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}$$

Exemples:

$$\frac{21}{28} = \frac{7 \times 3}{7 \times 4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{36}{27} = \frac{9 \times 4}{9 \times 3} = \frac{4}{3}$$

3. Division : technique.

3.1. Recherche du quotient.

Définition: La division de a par b (où b est non nul) est l'opération qui permet de calculer la valeur décimale exacte ou approchée du quotient de a par b.

Exemples :

- où la division s'arrête:

42	35
-35	1,2
70	
-70	
0	

On a donc: $\frac{42}{35} = 1,2$ ou autrement dit: $42 = 35 \times 1,2$.

- où la division ne s'arrête pas:

50	**6**
-48	8,33...
20	
-18	
20	
-18	
2	

On a donc: $\frac{50}{6} \approx 8,33$. 8,33 est une valeur approchée au centième près du quotient de 50 par 6.

3.2. Divisions par 10 ; 100 ; 1000....

Règle: Pour diviser par 10, 100,1000,... un nombre décimal, on déplace la virgule de 1,2, 3, ... rang(s) vers la gauche en rajoutant éventuellement des zéros devant le nombre.

Exemple:

329 : 10 = 32,9

329 : 100 = 3,29

329 : 1000 = 0,329

Critères de divisibilité par 2,3,4,5,8,9,11

2 : un nombre est divisible par 2 lorsque le chiffre des unités est: 0, 2, 4, 6 ou 8

exemples: 13 574 ; 279 836

5 : un nombre est divisible par 5 lorsque le chiffre des unités est: 0 ou 5

exemples: 3 570 ; 14 235

10 : un nombre est divisible par 10 lorsque le chiffre des unités est: 0

exemples: 120 ; 13 000

4 : un nombre est divisible par 4 lorsque les deux chiffres de droite forment

un nombre multiple de 4: 00, 04, 08, 12,...........80, 84, 88, 92, 96

exemples: 148 ; 57 376

25 : un nombre est divisible par 25 lorsque les deux chiffres de droite sont : 00, 25, 50 ou 75

exemples: 3 325 ; 723 775

100 : un nombre est divisible par 100 lorsque les deux chiffres de droite sont: 00

exemples: 85 300 ; 87 000

8 : un nombre est divisible par 8 lorsque les 3 chiffres de droite forment un nombre

multiple de 8: 008, 016, 024,......072, 080, 088,.....520, 528,.....984, 992

exemples: 69 776(776=8x97) ; 98 024

125 : un nombre est divisible par 125 lorsque les 3 chiffres de droite forment un nombre

multiple de 125: 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875

1 000 : un nombre est divisible par 1000 lorsque les trois chiffres de droite sont: 000

exemples: 234 000 ; 150 000

3 : un nombre est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est un nombre multiple de 3

exemples: 741 (7+4+1 = 12) ; 8 433 (8+4+3+3 = 18)

9 : un nombre est divisible par 9 lorsque la somme de ses chiffres est un nombre multiple de 9

exemple: 12 345 678 (1+2+3+4+5+6+7+8 = 36)

11 : un nombre est divisible par 11 lorsque la différence entre la somme des chiffres de rang pair et la somme des chiffres de rang impair est un multiple de 11

exemple: 919 380 (9+9+8 = 26 ; 1+3+0 = 4; 26 - 4 = 22 = 2x11)

DIVISIBILITÉ par 7

Règle	Exemple	Commentaires
Méthode 1 § On prend tous les chiffres sauf le dernier § On soustrait 2 fois le dernier § On vérifie si le résultat est divisible par 7	364	36 - 2 x 4 = - 28 28 = 7 x 4
Méthode 2 § Multiplier le chiffre de gauche par 3 et ajouter au chiffre suivant. § Répéter. Si le résultat est divisible par 7, c'est bon	364	3x3+ 6 =15 1x3+ 5 = 8 8x3+ 4 =28

Lemme de divisibilité par 13

Le nombre $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ est divisible par 13 si et seulement si $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1} + 4a_0$ est divisible par 13.

Exemples

637 est divisible par 13 car

63 + 4 x 7 = 91

et 91 est divisible par 13.

D'une manière plus générale il suffit de répéter l'opération ci-dessus jusqu'à obtenir comme résultat final 13, 26 ou 39. Ce qui prouvera que le nombre considéré au départ est divisible par 13.

Soit le nombre 224185. On a :

22418 + (4 × 5) = 22438

2243 + (4 × 8) = 2275

227 + (4 × 5) = 247

24 + (4 × 7) = 52

5 + (4 × 2) = 13

Nous obtenons 13 donc 224185 est divisible par 13.