Lycée El Hedi Ben Hsin Jendouba

Devoir de synthese N°3

EXERCICE N° 1: 4pts :

Le tableau suivant représente l'âge des enfants d'une crèche.

L'âge en années	$[0,1[$	$[1,2[$	$[2,3[$	$[3,4[$	$[4,5[$
L'effectif	12	13	17	8	10
Effectifs cumulés croissants					

1. Recopier ce tableau et compléter les effectifs cumulés croissants.
2. a. Construire le polygone des effectifs cumulés croissants.
   b. En déduire la médiane et les quartiles Q_1 et Q_3.

EXERCICE N° 2: 8 pts :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{-x+4}{2x-4}$ et on désigne par ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. a. Vérifier que pour tout x de D_f, $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-2}$
   b. Définir le centre et les asymptotes à la courbe ζ .
   c. Etudier les variations de f sur $]-\infty; 2[$ puis sur $]2; +\infty[$.
   d. Tracer la courbe ζ.
3. Soit la fonction g définie par $g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{|x|-2}$
   a. Déterminer le domaine de définition de g.
   b. Montrer que g est une fonction paire.
   c. Tracer (avec une autre couleur) en justifiant la courbe ζ ' représentant la fonction g dans le même repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
4. Déterminer le nombre de solutions : $2m|x| - |x| = 4m$

EXERCICE N° 3 : 4 pts

I/ Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soient Δ la droite d'équation cartésienne $2x + y - 3 = 0$ et le point $A(1,1)$.

1. Calculer la distance du point A à la droite Δ.
2. Déterminer l'équation cartésienne du cercle ξ de centre $I(3,2)$ et de rayon $\sqrt{5}$.
3. Montrer que Δ est tangent à ξ au point A.

II/ $\zeta_m = \{M(x,y)\ tel\ que\ x^2 + y^2 - 4mx - 2y + 4m = 0\}$ où m est paramètre réel .

1/ Déterminer m pour que ζ_m soit un cercle. Définir son centre ω_m et son rayon.

2/ Que Décrit les points w_m lorsque m varie dans ℝ .

EXERCICE N° 4 : 4 pts

SABCD est une pyramide dont la base ABCD est un carré tels que (SA) est perpendiculaire au plan $(ABCD)$ et $AS = AB$.

1. a. Montrer que le triangle SAD est rectangle en A.
   b. Montrer que le triangle SAB est rectangle et isocèle en A.
   c. Montrer que (AD) est perpendiculaire au plan (SAB).
   d. Montrer que (AD) et (SB) sont orthogonales.
2. Soient I,J et K les milieux respectifs des arêtes $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$.
   Montrer que (SB) est perpendiculaire au plan (ADJ).
3. Déterminer en justifiant le plan médiateur du segment $[SA]$.

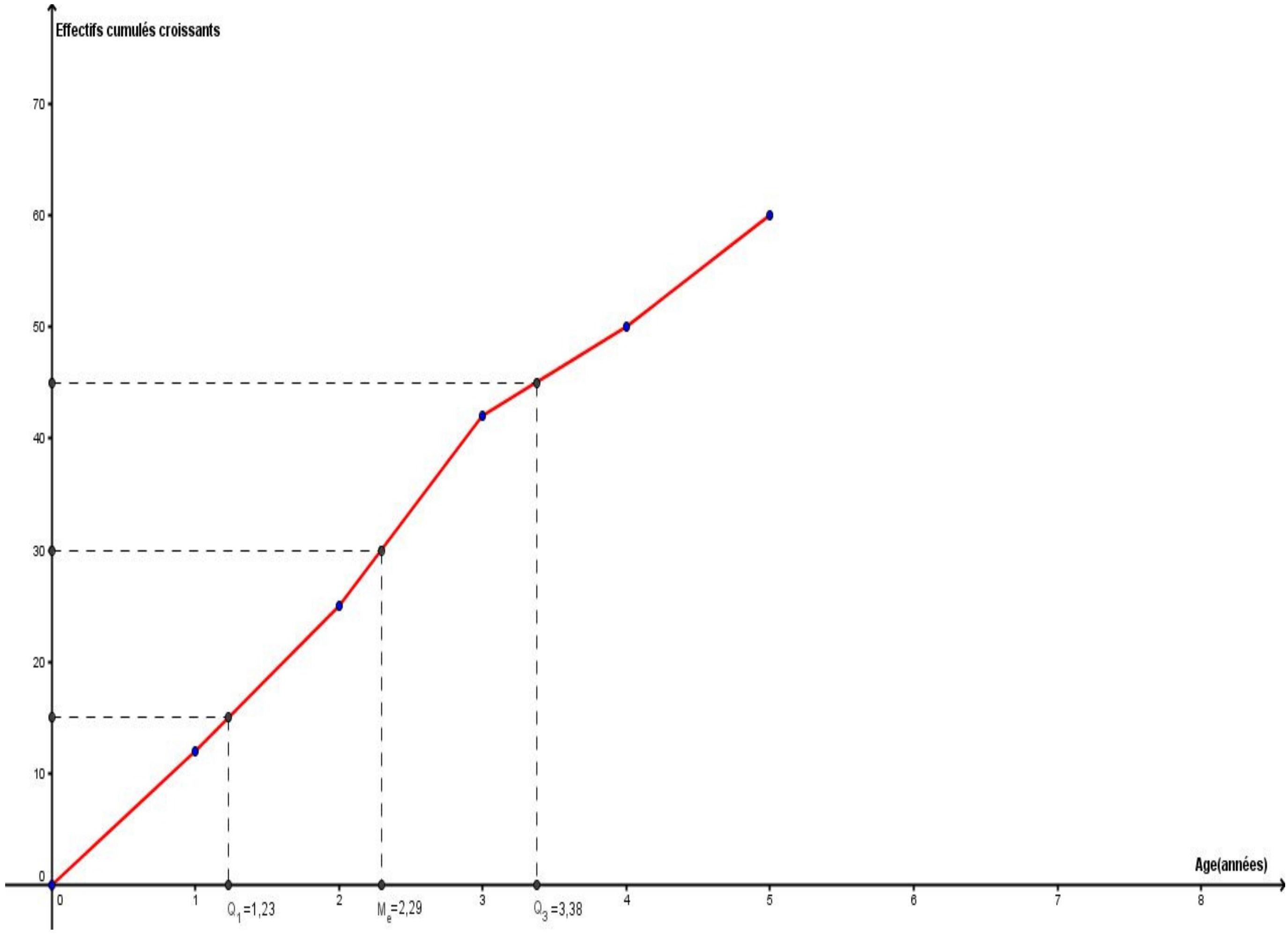
Correction

EXERCICE N° 1:

1.

L'âge en années	$[0,1[$	$[1,2[$	$[2,3[$	$[3,4[$	$[4,5[$
L'effectif	12	13	17	8	10
Effectifs cumulés croissants	**12**	**25**	**42**	**50**	**60**

2.a.



b. La médiane : $M_e \approx 2{,}29$, le Quartile : $Q_1 \approx 1{,}23$ et le quartile $Q_3 \approx 3{,}38$.

EXERCICE N° 2:

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R}, 2x - 4 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.
2. $a.$ $\forall\, x \in D_f$, $-\frac{1}{2} + \frac{1}{x-2} = \frac{-(x-2)+2}{2(x-2)} = \frac{-x+2+2}{2x-4} = \frac{-x+4}{2x-4} = f(x)$.

   b. ζ est une hyperbole de centre $I\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x = 2$ et $y = -\frac{1}{2}$.

   c. **<u>Sur $]-\infty; 2[$</u>**

   $a < b \Rightarrow a - 2 < b - 2 \Rightarrow \frac{1}{a-2} > \frac{1}{b-2} \Rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{a-2} > -\frac{1}{2} + \frac{1}{b-2} \Rightarrow f(a) > f(b)$.

   Donc f est décroissante sur $]-\infty; 2[$.

   <u>Sur $]2; +\infty[$</u>

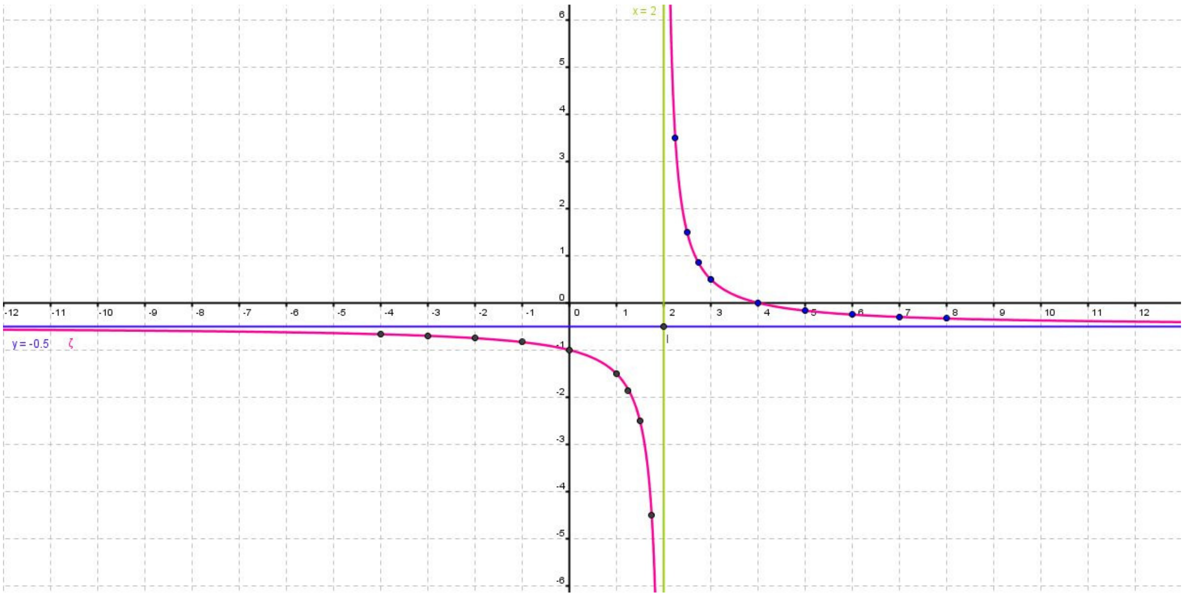
   $a < b \Rightarrow a - 2 < b - 2 \Rightarrow \frac{1}{a-2} > \frac{1}{b-2} \Rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{a-2} > -\frac{1}{2} + \frac{1}{b-2} \Rightarrow f(a) > f(b)$.

   Donc f est décroissante sur $]2; +\infty[$.

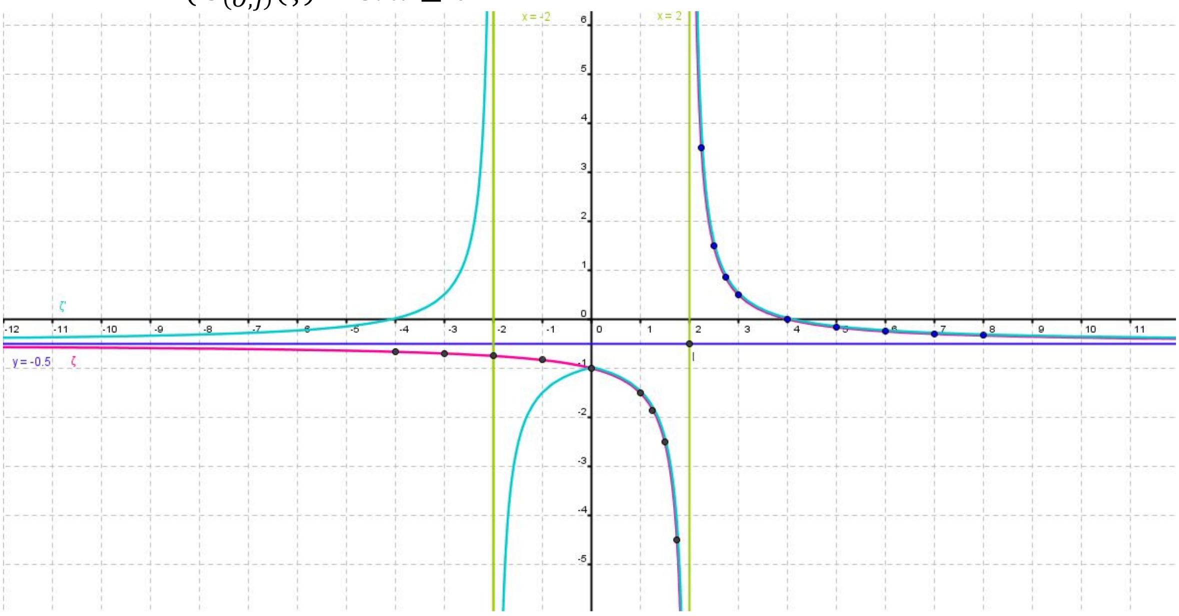
Par suite f est décroissante sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

d. Tableau de valeurs :

x	2,25	2,5	2,75	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	3,5	1,5	$\frac{5}{6}$	0,5	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{3}$



3. a. $D_g = \{x \in \mathbb{R}, |x| - 2 \neq 0\}$.
$|x| - 2 = 0 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.
Donc $D_g = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$.
b. $x \in D_g \Leftrightarrow x < -2 \; ou - 2 < x < 2 \; ou \; x > 2$
$\Leftrightarrow -x > 2 \; ou - 2 < -x < 2 \; ou - x < -2$
$\Leftrightarrow -x \in D_g$.
c. Si $x \geq 0$ alors $g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{|x|-2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-2} = f(x)$.
Donc $\zeta' = \begin{cases} \zeta & si \; x \geq 0 \\ S_{(O,\vec{j})}(\zeta) & si \; x \leq 0 \end{cases}$



4. $2m|x| - |x| = 4m \Leftrightarrow 2m|x| - 4m = |x| \Leftrightarrow 2m(|x|-2) = |x|$

$$\Leftrightarrow \frac{|x|}{|x|-2} = 2m$$
$$\Leftrightarrow \frac{|x|-2+2}{2(|x|-2)} = m$$
$$\Leftrightarrow \frac{|x|-2}{2(|x|-2)} + \frac{2}{2(|x|-2)} = m$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{|x|-2} = m$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{|x|-2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = m$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{|x|-2} + 1 = m$$
$$\Leftrightarrow g(x) = m - 1\ (E)$$

Le nombre de solutions (n_s)de cette équation sont le nombre des points d'intersections de ζ' et la droite Δ d'équation $y = m - 1$.

- Si $(m-1) \in]-\infty; -1[\cup \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[\Rightarrow m \in]-\infty; 0[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ alors $n_s = 2$.
- Si $m - 1 = -1 \Rightarrow m = 0$ alors $n_s = 1$.
- Si $(m-1) \in \left]-1; -\frac{1}{2}\right] \Rightarrow m \in \left]0; \frac{1}{2}\right]$ alors $n_s = 0$.

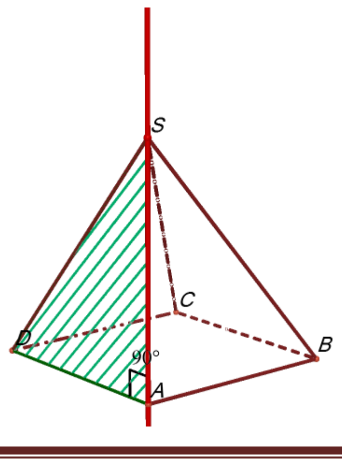
EXERCICE N° 3 :

1. $d(A,\Delta)=\frac{|2\times1+1\times1-3|}{\sqrt{2^2+1^2}} = 0$.
2. ζ: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = \sqrt{5}^2 = 5$.
3. $d(I,\Delta)=\frac{|2\times3+1\times2-3|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$. $d(I,\Delta) = R$ donc Δ est tangent à ξ au point A.

II.

1. $M(x,y) \in \zeta_m \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4mx - 2y + 4m = 0.$
$$\Leftrightarrow (x-2m)^2 + (y-1)^2 - 4m^2 - 1 + 4m = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2m)^2 + (y-1)^2 = 4m^2 - 4m + 1$$
$$\Leftrightarrow (x-2m)^2 + (y-1)^2 = (2m-1)^2$$
ζ_m est un cercle $\Leftrightarrow (2m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow 2m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$.
ζ_m est un cercle $\Leftrightarrow m \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$.
ζ_m est un cercle de centre $w_m(2m; 1)$ et de rayon $R_m = \sqrt{(2m-1)^2} = |2m-1|$
2. $\sigma_m = \left\{w_m(2m; 1)\ avec\ m \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}$.
$w_m(2m; 1) \in \sigma_m \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2m \\ y = 1 \end{cases}$
σ_m est une droite d'équation $y = 1$.

EXERCICE N° 4 :



1. a. $(SA) \perp (ABC)$.
$(AD) \subset (ABC)$.
Donc $(SA) \perp (AD)$ par suite SAD est rectangle en A.

b. $(SA) \perp (ABC)$

$(AB) \subset (ABC)$

Donc $(SA) \perp (AB)$

par suite SAB est rectangle en A.

Comme $AS = AB$

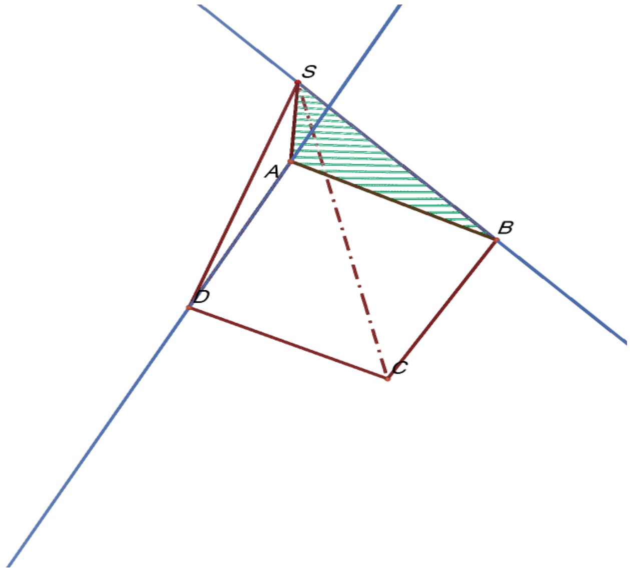
alors SAB est rectangle et isocèle en A.

c. $ABCD$ est un carré ⇨ $(AD) \perp (AB)$.

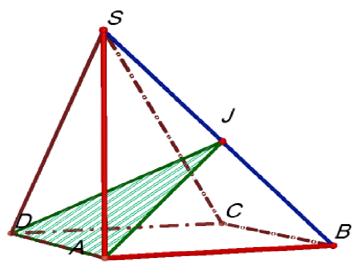
D'après 1.a $(SA) \perp (AD)$, de plus (SA) et (AB) sont sécantes donc $(AD) \perp (SAB)$.

d. On a : $(AD) \perp (SAB)$ et $(SB) \subset (SAB)$

alors (AD) et (SB) sont orthogonales.



2. SAB est un triangle isocèle en A et $J = S * B$ alors (AJ) est la médiatrice de $[SB]$ par suite $(AJ) \perp (SB)$, or $(AD) \perp (SB)$ et (AJ) et (AD) sont sécantes donc $(SB) \perp (ADJ)$.



3. Dans le triangle SAB, on a :
   $I = S * A$
   $J = S * B$
   Donc $(IJ)//(AB)$.

   Dans le triangle SAB, on a :
   $K = S * C$
   $J = S * B$
   Donc $(JK)//(BC)$

(IJ) et (JK) sont incluses et sécantes dans (IJK) et (AB) et (BC) sont incluses et sécantes dans (ABC) par suite (IJK) // (ABC).

Comme $(SA) \perp (ABC)$ alors $(SA) \perp (IJK)$ de plus $I = S * A$ alors (IJK) est le plan médiateur$[SA]$.