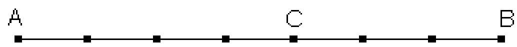
Devoir de Synthèse n° 1

Exercice n°1 : *(3 pts)*

Pour chaque question, une seule réponse est correcte. On indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,75 point, une réponse fausse enlève 0,25 point, et l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note sera ramenée à zéro.

1) On donne la figure suivante :



Le point *C* est le barycentre des points pondérés :

a/ $(A\,,4)\,,(B\,,3)$ ***b/*** $(A\,,3)\,,(B\,,4)$ ***c/*** $(A\,,-3)\,,(B\,,4)$

2) L'ensemble des solutions de l'équation : $12x^2+11x-5=0$ est :

a/ $S_{IR}=\left\{\frac{1}{3}\ ,\ \frac{5}{4}\right\}$ ***b/*** $S_{IR}=\left\{\frac{-1}{3}\ ,\ \frac{5}{4}\right\}$ ***c/*** $S_{IR}=\left\{\frac{1}{3}\ ,\ \frac{-5}{4}\right\}$.

3) Soit *b* un réel, l'équation : $2x^2+bx+3=0$ admet toujours :

a/ Deux solutions ***b/*** Zéro solution ***c/*** Je ne sais pas.

4) Lorsque *x* est dans l'intervalle $\left[\sqrt{2}\,,\sqrt{3}\,\right]$, le trinôme $-x^2+3x-2$ est :

a/ Toujours positif ***b/*** Toujours négatif ***c/*** Je ne sais pas.

Exercice n°2 : *(7 pts)*

On considère les polynômes *A* et *P* définis par : $A(x)=4x^4-13x^2+9$.

$$P(x)=2x^3+3x^2-5x-6.$$

1) $a/$ Factoriser le trinôme : $4x^2-13x+9$.
   $b/$ En déduire la factorisation de $A(x)$ en produit de quatre facteurs.
2) $a/$ Vérifier que (-1) est une racine de *P*.
   $b/$ En déduire que : $P(x)=(x+1)R(x)$ où *R* est un polynôme que l'on déterminera.
3) Soit *F* la fonction rationnelle définie par : $F(x)=\frac{A(x)}{P(x)}$.

   $a/$ Déterminer le domaine de définition de *F*, puis simplifier $F(x)$.
   $b/$ Résoudre dans *IR* : $F(x)\geq 0$. puis $\sqrt{F(x)}=2\sqrt{x-1}$.

Exercice n°3 : *(4 pts)*

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. Δ est parallèle à (AI) passant par B.

Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1) Déterminer l'image de la droite (AI) par t.
2) La parallèle à (AB) passant par C coupe (AI) en L et la droite Δ en K.
   $a/$ Montrer que : $t(C) = L$.
   $b/$ Déterminer en justifiant l'image de L par t.

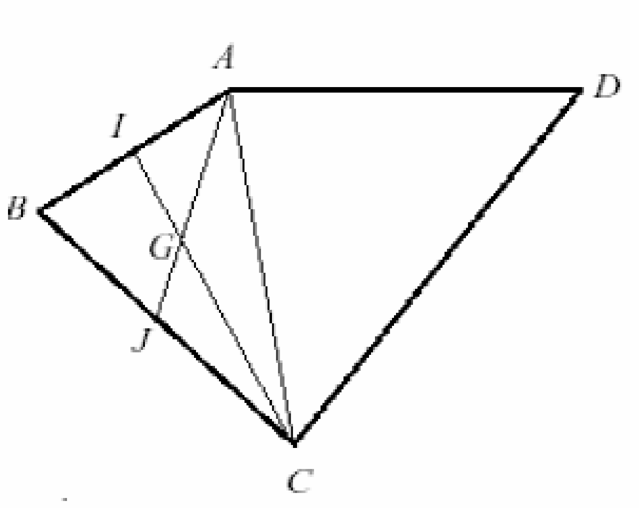
Exercice n°4 : *(6 pts)*

Soit *ABCD* un quadrilatère, *G* est le centre de gravité du triangle *ABC*, *I* et *J* sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.

1) Soit *L* le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(D, 3)$, et *K* le barycentre des points pondérés $(C, 1)$, $(D, 3)$.

Construire *L* et *K*.

2) Soit *H* le point défini par : $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} + 3\overrightarrow{HD} = \vec{0}$.
   $a/$ Montrer que *H* est le barycentre des points pondérés $(I, 1)$, $(K, 2)$.
   $b/$ Montrer que les points *J*, *H* et *L* sont alignés.
   $c/$ Construire alors le point *H*. Justifier.
3) Montrer que les droites (IK), (JL) et (GD) sont concourantes.



CORRECTION(proposee par GUESMI.B)

EXERCICE1

1)b 2) c 3) c 4) a

EXERCICE2

1)a)$4x^2 13x + 9 = 0$ *on remarque* $a + b + c = 0$ *donc*

1 est une solution et l'autre est c/a=9/4

si$\Delta \geq 0$ alors $ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'')$

donc $4x^2-13x+9=4(x-1)(x-9/4)=(4x-9)(x-1)$

b)en posant $y=x^2$ on a : $A(x)=T(y)=4y^2-13y+9$

$=(4y-9)(y-1)$

$=(4x^2-9)(x^2-1)$

$=(2x-3)(2x+3)(x+1)(x-1)$

2)a

On le verifie tres facilement

b)puisque (-1) est une solution de $p(x)=0$ alors $p(x)=(x-(-1))(ax^2+bx+c)$

$=(x+1)(a^2+bx+c)$

$=ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$

Donc $\begin{cases} a = 2 \\ a + b = 3 \\ c = -6 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2 \ ; b = 1 \ \text{ et } c = -6$

D'ou $p(x)=(x+1)(2x^2+x-6)$

3)a)

$P(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ ou $2x^2+x-6=0$ donc $x=-1$ ou $x=-2$ ou $x=3/2$

Donc $D_f=IR-\{-1,-2,3/2\}$

6) x	$-\infty$		-2		-3/2		-1		1		3/2		$+\infty$
$4x^2-9$		+		+	0	--		--		--	0	+	
$X^2 - 1$		+		+		+	0	--	0	+		+	
$X+1$		--		--		--		+		+		+	
$2x^2+x-6$		+	0	--		--		--		--	0	+	
$F(x)$		--	‖	+		--	‖	--		+	‖	+	

$$F(x) \geq 0 \Leftrightarrow S_{IR} =]-2, \frac{-3}{2}] \cup [1, +\infty[- \{\frac{3}{2}\}$$

6) $\sqrt{F(x)} = 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow F(x) \geq 0 et\ x \geq 1$

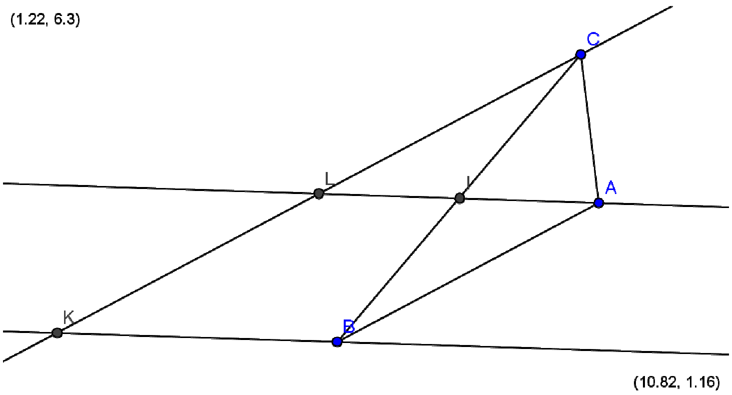
signifie que $F(x)=4(x-1) \Leftrightarrow \frac{(2x-3)(2x+3)(x+1)(x-1)}{(x+1)(2x-3)(x+2)} = 4(x-1) \Leftrightarrow$

$(2x+3)(x-1)=4(x-1)(x+2) \Leftrightarrow (x-1)(2x+3-4x-8)$

$\Leftrightarrow (x-1)(-2x-5)=0 \qquad et\ x \geq 1$

$\Leftrightarrow x=1$

EXERCICE3

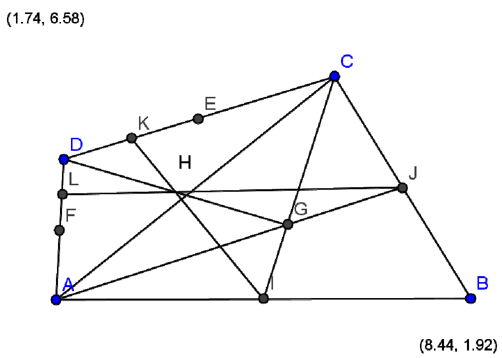


1)on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$ *donc puisque l'mage d'une droite par une Translation est une droite de meme direction donc l'image de (AB) est la Droite passant par t(A)=B et parallele à (AB) qui n'est que* Δ

a)On a ABLC est un parallelogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CL}$ *donc* $t(C) = l$

b)De la meme manière t(L)=K

EXERCICE4



1)on a $\forall M \in P \ \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MD} = (1+3)\overrightarrow{ML}$ *propriete du barycentre*

D'où si M=D on aura $\overrightarrow{DA} = 4\overrightarrow{DL} \Leftrightarrow \overrightarrow{DL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$ (1)

De la meme facon on a : $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ (2)

2) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} + 3\overrightarrow{HD} = \vec{0}$ (a) *et I le milieu de* $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

On intercalle I et K on a $\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KC} + 3\overrightarrow{HK} + 3\overrightarrow{KD} = \vec{0}$

Or $\overrightarrow{KC} + 3\overrightarrow{KD} = \vec{0}$ *donc* $\overrightarrow{HI} + 2\overrightarrow{HK} = \vec{0}$

Donc H est le barycentre de (I,1) et (K,2) *b) de la meme facon on intercale L et J dans la relation(a) on aura apres tout calcul*

H barycentre de (J,1) et (L,2)

De meme on intercale G dans la relation (a) et en remarquant que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \ \ (G\ est\ le\ centre\ de\ gravite\ de\ ABC)$$

On obtient H est le milieu de [DG]

Conclusion : $\mathcal{H} \in ((IK)\ ; H \in (JL) et\ H \in (DG)$

Donc les droite (IK) ;(JL) et (DG) sont concourantes en H