DEVOIR DE SYNTHESE N°2(3ème maths)mars 2012

EXERCICE1

On veut étudier l'existence et le nombre d'extremum de la fonction f définie sur IR par

f(x)= $x^2 - 2sinx$ pour cela on etudie d'abord la fonction f'(x) derivee de f(x)

1) étude $\underline{f'(x)}$ (et ***non*** pas f(x))

a) montrer que $f''(x) = 2(1 + sinx)$

b)montrer que $0 \leq f''(x) \leq 4$; $\forall\, x \in IR$

2)a) vérifier que $\forall x \in IR$ $on\ a : 2(x-1) \leq f'(x) \leq 2(x+1)$

b)en déduire $\lim_{x\to-\infty} f'(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$

3) a)montrer que f '(x) est strictement croissante sur IR

b)en déduire que $\forall\, x \leq \frac{-\pi}{2}$ $alors\ f'(x) \leq -\pi$

c) de même montrer que $\forall\, x \geq \frac{-3\pi}{2}$ $alors\ f'(x) \geq 3\pi$

d) en déduire que l'équation $f'(x) = 0$ $admet\ une\ seule\ solution\ \alpha$ $\in]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$

4) d'âpres les questions 3)a)b)c) et d) déduire le signe $f'(x)$ sur IR

5)montrer que f(x) admet un seul minimum m en α(on cherchera les variations de f(x) en utilisant les questions precedentes)

6) montrer que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

7) montrer que $cos\alpha = \alpha$

8)en déduire que $m = \alpha^2 - 2\sqrt{1-\alpha^2}$

EXERCICE2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on considere les points A et B d'affixes

Respectives $a = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$

1)a) écrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes a et b

b)représenter les points A et B dans le repère

2)on pose z=a+b et on désigne par M le point d'affixe z

a)montrer que OBMA est un carre

b)donner la forme trigonométrique de z

c)calculer alors $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}$

EXERCICE3

Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4).

1) On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. Calculer denombrer le nombre de tirage

a) ne contenant que 3 jetons verts ;

b) De ne tirer aucun jeton vert

c) De tirer au plus 2 jetons verts ;

d) De tirer exactement 1 jeton vert.

2) On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac. Reprendre alors les questions a), b), c) et d).

CORRECTION

EXERCICE1

1)a)

On a f(x)=$x^2 - 2sinx$ donc f est derivable sur IR et $f'(x) = 2x - 2cosx$

f'(x) est derivable sur IR et on a : $f''(x) = 2 + 2sinx = 2(1 + sinx)$

b)on a : $\forall x \in IR\ , -1 \leq sinx \leq 1\ donc\ 0 \leq 1 + sinx \leq 2\ \ d'ou\ \ 0 \leq 2(1 + sinx) \leq 4$

equivaut à $0 \leq f''(x) \leq 4$

2)a) on a : $-1 \leq cosx \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -cosx \leq 1 \Leftrightarrow -1 + x \leq x - cosx \leq 1 + x$

$\Leftrightarrow\ 2(-1 + x) \leq 2(x - cosx) \leq 2(1 + x) \Leftrightarrow 2(-1 + x) \leq f'(x) \leq 2(1 + x)$

b)$\lim_{x\to-\infty} 2(x - 1) = -\infty\ \ et\ \ \lim_{x\to-\infty} 2(x + 1) = -\infty\ \ donc\ -\infty \leq \lim_{x\to-\infty} f(x) \leq -\infty$

d'ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ de meme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3)a) d'apres 1)b) on a f''(x)≥ 0 $\forall x \in IR\ \ donc\ f'(x) est\ croissante\ sur\ IR$

b) f' (x) est croissante sur IR d'ou $\forall\ x \leq \frac{-\pi}{2}\ \ alors\ f'(x) \leq f'\left(\frac{-\pi}{2}\right)\ \Leftrightarrow\ \ or\ f'\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -\pi$

d'où le resultat

c) de la meme facon on montre que $\forall\ x \geq \frac{3\pi}{2}\ \ on\ f'(x) \geq 3\pi$

d) d'apres b) $f'(x) \leq -\pi\ \ pour\ x \leq \frac{-\pi}{2}\ \ \ donc\ \ f'(x) \neq 0\ \ pour\ x \leq \frac{-\pi}{2}$

d'apres c) $f'(x) \neq 0\ \ pour\ x \geq \frac{3\pi}{2}$

or $0 \in [-\pi, 3\pi]\ et\ que\ f'(x) est\ continue\ et\ stictement\ croissante\ sur\ \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

donc l'equation f'(x)=0 admet une seule solution note α dans $]\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

4) d'apres 3)a) f'(x)≤ 0 $\forall x \leq \frac{-\pi}{2}$, puis $f'(\alpha) = 0$ d'apres c) $f'(x) \geq 0 , \forall x \geq \frac{3\pi}{2}$

D'où $si\ \frac{-\pi}{2} \leq x \leq \alpha\ \ et\ f'(x)\ croissante\ donc\ f'(x) \leq f'(\alpha) = 0$

De meme $si\ \alpha \leq x \leq \frac{3\pi}{2}\ \ alors\ f'(x) \geq f'(\alpha) = 0$

5) d'apres la question precedente $x < \alpha\ \ \Leftrightarrow f'(x) < 0\ \ d'ouf\ stictement\ decroissante$

$$x = \alpha \Leftrightarrow f'(x) = 0\ \ d'ouf\ \ est\ constante$$

$$x > \alpha\ \ \Leftrightarrow f'(x) > 0\ \ d'ouf\ est\ strictement\ croissante$$

La derivee de f s'annule et change de signe donc f admet un minimum relatif m en α

Qui vaut $m = f(\alpha) = \alpha^2 - 2sin\alpha$

6) on a : $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi\ ; f'(0) = -2\ et\ que\ f'(\alpha) = 0\ donc\ \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$

7) on a :$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2(\alpha - cos\alpha) = 0 \Leftrightarrow cos\alpha = \alpha$

8)on a : $m = f(\alpha) = \alpha^2 - 2sin\alpha$

On a $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1\ \ \ d'ou\ si\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\ \ \ on\ a\ \ sin\alpha > 0\ \ et\ cos\alpha > 0$

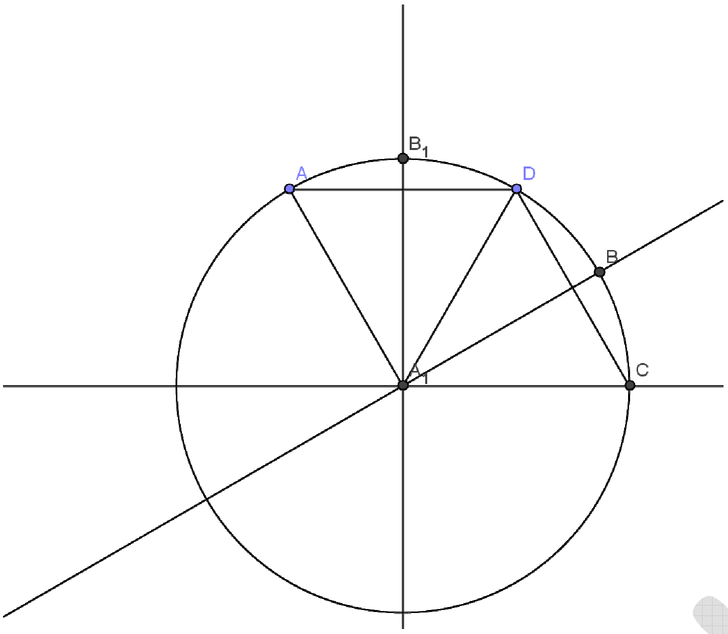
Donc $sin^2\alpha\ + \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow sin\alpha = \sqrt{1-\alpha^2}\ \ et\ donc\ m = f(\alpha) = \alpha^2 - 2\sqrt{1-\alpha^2}$

EXERCICE2

1)a) on $\begin{cases} cos\theta = \frac{-1}{2} \\ sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]\ \ \ d'ou\ a = cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}$

De meme $b = cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}$

b)



2)a) $z = a + b = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\ \ et\ M\ d'affixe\ \ z$

Montrons que OBMA est un carre

On a : $z_{\overrightarrow{OB}} = z_B = b\ \ \ et\ que\ z_{\overrightarrow{AM}=} z - a = b$

Donc OBMA est un parallelogramme

Or $|b| = |a| = 1\ \ \ donc\ OBMA\ est\ un\ losange$

Montrons que OM=AB

On a :$|z| = OM = |a+b| = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4} + (\frac{\sqrt{3}+1}{2})^2} = \sqrt{2}$

De meme $AB = |b-a| = \sqrt{2}$

Donc OBMA est un losange ayant deux diagonales egaux donc c'est un carre

b)puisque OBMA est un carre alors $OM = |z| = \sqrt{2}$

et que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM})[2\pi] \equiv \arg(b) + \frac{\pi}{4}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}[2\pi] \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]$

donc $z = \sqrt{2}(cos\frac{5\pi}{12} + isin\frac{5\pi}{12})$ (1)

or $z = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + i(\frac{\sqrt{3}+1}{2})$ (2)

en egalisant (1) et (2)

on obtient $\begin{cases} cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \\ sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$

EXERCICE3

1)

a)Tirages successifs sans remise de 3 jetons parmi 9. Il y a $A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 9\times8\times7 = 504$ possibilités

b) « Ne tirer aucun jeton vert ».A_4^3 = 4x3x2=24

c) « Tirer au plus 2 jetons verts »

$$A_4^3 + 3.A_5^1.A_4^2 + 3.A_5^2.A_4^1 = 37$$

d) « Tirer exactement 1 jeton vert ». $3.A_5^1.A_4^2 = 180$

2) Tirages simultanés de 3 jetons parmi 9. Il y a $C_9^3 = 84$ possibilités

a) « Tirer 3 jetons verts ». On a $C_5^3 = 10$

b) « Ne tirer aucun jeton vert ». On a $C_4^3 = C_4^1 = 4$

c) « Tirer au plus 2 jetons verts »

$$C_4^3 + C_5^1 . C_4^2 + C_5^2 . C_4^1 = 74$$

d) « Tirer exactement 1 jeton vert ». $C_5^1 . C_4^2 = 30$

Commentaire sur l'exercice :

Selon toute logique, on doit retrouver les mêmes résultats dans les deux parties. En effet, tirer successivement sans remise 3 boules ou les tirer simultanément revient au même.

Que l'on traite un tirage comme un arrangement ou comme un sous-ensemble, les questions a) et b) nous fournissent le même résultat si on a conservé l'ordre jusqu'au bout (numérateurs et dénominateurs des fractions) le même mode de comptage.

En ce qui concerne la question c), si on travaille avec des arrangements on induit ainsi un ordre. Il ne faut donc pas oublier de multiplier par 3, c'est à dire de choisir d'abord une place pour le jeton vert. Ce problème ne se pose pas avec des combinaisons.

Conclusion : Il est plus facile de travailler avec des combinaisons

Cette dernière remarque est valable car le type d'événements étudié ne fait pas intervenir d'ordre.