Devoir de contrôle N°2 (3èM)

EXERCICE1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=4$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1$ pour $n\in IN$

Soit la fonction $f(x)=\frac{1}{2}x+1$

1)Tracer dans un repère orthonormé(unité=1cm) la courbe (C) de f et la droite D d'équation D :y=x

2) construire sur l'axe des abscisses les points d'abscisses u_1 ;u_2 ;u_3 ;et u_4

3)calculer u_1 ;u_2 ;u_3 ; et u_4

Combien faut il prendre de temps pour calculer u_{2011}(ne donner pas de réponse)

4) conjecturer a l'aide du graphique la limite l de la suite (u_n)

5) résoudre l'équation $f(\alpha)=\alpha$

6) soit la suite (v_n) définie sur IN par $v_n=u_n-\alpha$

a)montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison

b)exprimer v_n en fonction, de n

7) a)en déduire u_n en fonction de n

b)calculer alors u_{2011}

8) déterminer alors la limite l

EXERCICE2

Q_1 : Une seule reponse est exacte laquelle(sans justification)

$Z=\frac{2+4i}{2-i}$ alors A : le point M d'affixe z est sur le cercle trigonométrique

B : $z=\bar{z}$

C : z est un imaginaire pur

D : $z=\frac{2}{3}i$

Q_2 : répondre par vrai ou faux sans justification

La suite définie sur IN par $u_0=1$;$u_1=2$ et $u_{n+2}=\frac{3}{2}u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$

A : la suite (v_n) definie sur IN par $V_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite geometrique

B : la suite (v_n) definie sur IN par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est constante

C : pour tout nϵIN $u_n = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$

D : pour tout nϵIN $u_n = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$

Q_3 : répondre par vrai ou faux sans justification

Soit l'ensemble E={1,2,3,4,5}

A : le nombre de sous ensemble de E est : 2^5

B : le nombre de sous ensemble de E ayant exactement 2 éléments est :20

C :le nombre de sous ensemble de E contenant 1 est :2^4

D : le nombre de sous ensembles de E contenant les élément 2et3 est :8

EXERCICE3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ a tout point M d'affixe non nulle z

On associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{-1}{\bar{z}}$

1)Construire les images des points A d'affixe 1+i et B d'affixe 2i

2) on pose z=x+iy et ,z'=x'+iy' (x ;y ;x' et y' des réels)

a) déterminer x' et y' en fonction de x et y

b) en déduire que O ;M et M' sont alignes

3) montrer que $\overline{z' + 1} = \frac{1}{z}(z - 1)$

4) on note C et D les points d'affixes respectifs 1 et -1

On note Γ le cercle de centre C et passant par O et prive de O

On suppose dans cette question que MϵΓ

a)Montrer que $|z - 1| = 1$

b)montrer que $|z' + 1| = |z'|$ et interpréter géométriquement

c) en déduire une construction géométrique de M' a partir de M

Correction du devoir de contrôle(2)2011 (3èmaths)

EXERCICE1

1)evident

2) evident

3)$u_2 = \frac{5}{2}$; $u_3 = \frac{9}{4}$; $u_4 = \frac{17}{8}$

4)on remarque que lorsque n augmente u_n s'approche de 2

5)f(α)=α signifie α=2

6)a) $v_n = u_n - 2$ $donc$ $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}v_n$ donc (V_n) est une suite geometrique de premier terme $V_0=u_0-2=2$ et de raison $\frac{1}{2}$

b)$v_n = v_0 q^n = \frac{1}{2^{n-1}}$

7)a)$u_n = v_n + 2 = \frac{1}{2^{n-1}} + 2$

b)$u_{2011} = \frac{1}{2^{2010}} + 2$

8)$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$

EXERCICE2

Q_1

A : faux

B : Faux

C : juste

D : faux

Q_2

A : faux

B : faux

C : faux

D : juste

Q3

A : vrai

B : faux

C : faux

EXERCICE3

1)A(1 ;1) et B(0,2)

2)a) x'+iy'=$\frac{-1}{x+iy} = \frac{-x}{x^2+y^2} + i\,\frac{-y}{x^2+y^2}$ donc$\begin{cases} x' = \frac{-x}{x^2+y^2} \\ y' = \frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$

b)det$(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) = 0$ alors O ;M ;M' sont alignes

3)z'+1=$\frac{-1}{\bar{z}} + 1$ alors $\overline{z' + 1} = \frac{-1}{z} + 1 = \frac{1}{z}(z-1)$

4)C(1) et D(-1)   Γ erst le cercle de centre C et de rayon OC

MϵΓ alors CM=OC   d'où

a)ona : CM=OC signifie que $|z-1| = 1$

b) $|z'+1| = |\overline{z'+1}| = \left|\frac{1}{z}\right| . |z-1| = 1.\frac{1}{|\bar{z}|} = |z'|$

alors M'D=OM' d'où M'ϵ mediatrice de [OD] soit Δ

c) on a : M'ϵΔ et M'ϵ(OM) d'où la construction de M'

EXERCICE4

1)F_0=3 ; F_1=5 et F_2=17

2) posons $D_n=2^{2^n}$ alors $D_{n+1} = 2^{2^{n+1}} = 2^{2^n.2} = (2^{2^n})^2 = D_n^2$

On a $F_n = D_n + 1$ $et\ F_{n+1} = D_{n+1} + 1 = D_n^2 + 1$

Or $D_n = F_n - 1$ donc

$F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1 = F_n^2 - 2F_n + 2$

3)$F_1 - 2 = F_0$ $vrai\ pour\ n = 1$

Supposons que pour tout n>1 on a $F_n - 2 = F_0.F_1 \dots\dots F_{n-1}$

Montrons que $F_{n+1} - 2 = F_0.F_1 \dots . F_n$

On a $F_{n+1} - 2 = F_n^2 - 2F_n \;\; d'apres(2)$

$=F_n(F_n - 2) = F_0.F_1 \ldots\ldots F_{n-1}.F_n$

Donc pour tout n≥ 1 on a: $F_n = F_0.F_1 \ldots\ldots F_{n-1}$

QUESTION FACULTATIVE

Pour n=2 on a F_2=17 se termine par 7

Supposons que pour tout n>2 F_n se termine par 7 et montrons que $F_{n+1} se\ termine\ par\ 7$

Donc F_n=(10a+7) avec a∊IN

On a $F_{n+1} = F_n^2 - 2F_n + 2$

= $(10a+7)^2$-2(10a+7)+2

=$100a^2$+120a+30+7

=10($10a^2$+12a+3)+7 se termine par 7

Donc pour tout $n \geq 2$ on a F_n se termine par 7

EXERCICE4 correction

Soit n un entier naturel positif et la suite $F_n = 2^{2^n} + 1$

1)calculer F_0 ; F_1 et F_2

2)monter par récurrence que $F_{n+1} = (F_n)^2 - 2F_n + 2$

3) montrer par récurrence que pour n≥1 on a :$F_n - 2 = F_0.F_1.F_2 \dots \dots .F_{n-1}$

QUESTION FACULTATUVE

Montrer pour tout n≥2 tout les F_n se terminent par 7