Devoir de controle N° 4

Exercice 1 : (4 points)

Répondre, avec justification, par Vrai ou Faux à chacune des propositions suivantes.

1. Si (U_n) est une suite arithmétique de raison r= 5 avec U_{10} = 70 alors U_0 = 20 .
2. Si (U_n) est une suite arithmétique de premier terme U_0= 5 et de raison r = $\frac{1}{3}$ alors le nombre $\frac{25}{3}$ est le dixième terme de cette suite.
3. Si $U_0+U_1+U_2+...+U_n=3n^2+7n+4$ et $U_0+U_1+U_2+...+U_{n-1}=3n^2+n$ alors (U_n) est une suite arithmétique.

Exercice 2 : (8 points)

Soit (V_n) la suite définie par : $V_0=1$ et pour tout entier naturel n , $V_{n+1}=2V_n+2n-1$.

1. a) Calculer V_1 et V_2.

   b) Monter que la suite (V_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. On définit la suite (W_n) sur $\mathbb{N}$ par $W_n=V_n+2n+1$.

   a) Montrer que (W_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison 2.

   b) Exprimer W_n puis V_n en fonction de n .

   c) Déterminer V_9

Exercice 3 : (8 points)

On considère un triangle ABA' rectangle en A . Soit R la rotation directe d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en A'. Voir figure ci jointe que l'on complètera et que l'on rendra avec la copie.

1. Soit O le centre de R . Montrer que le triangle OAA' est équilatéral puis placer O.
2. a) Construire B' = R(B) et placer $A''=R(A')$.

   b) Montrer que les droites (A'B') et (A'A'') sont perpendiculaires.

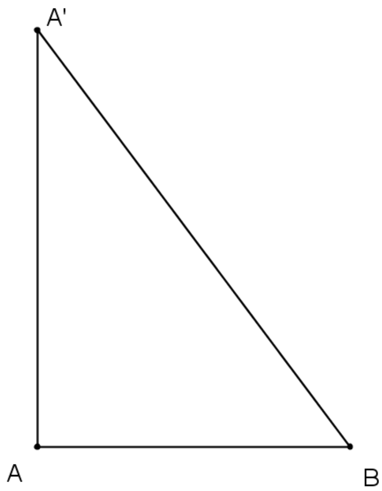
3. Soit I le milieu du segment [BA'] . On désigne par I' l'image de I par R.

Montrer que (OI') est la médiatrice du segment $[A'A'']$.

4. Soit J le point d'intersection de droites (AB) et (A'B') et J' = R(J).
Montrer que les points J, J', A' et B' sont alignés.

Figure de l’exercice 3 à compléter et à rendre

Nom de l’élève : …………………………………………………………………………….



Exercice 1 :

1. Vrai.

   En effet : $\left(U_n\right)$ est une suite arithmétique de raison r= 5 avec U_{10} = 70

   alors $U_0 = U_{10} - 10.r = 70 - 50 = 20$.

2. Faux.

   En effet :

   Le dixième terme de la suite arithmétique $\left(U_n\right)$ de premier terme U_0= 5 et de raison r = $\frac{1}{3}$ est

   $U_9 = U_0 + 9r = 5 + 3 = 8$ donc $U_9 \neq \frac{25}{3}$.

3. Vrai.

   En effet : Si $U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = 3n^2 + 7n + 4$ et $U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{n-1} = 3n^2 + n$

   alors $U_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n - \left(U_0 + U_1 + ... + U_{n-1}\right) = 3n^2 + 7n + 4 - \left(3n^2 + n\right) = 6n + 4$

   donc $\left(U_n\right)$ est une suite arithmétique.

Exercice 2 :

Soit $\left(V_n\right)$ la suite définie par : $V_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = 2V_n + 2n - 1$.

1. a) $V_1 = 2V_0 - 1 = 1$ et $V_2 = 2V_1 + 2 - 1 = 2 + 1 = 3$.

   b) $V_1 - V_0 = 0$ et $V_2 - V_1 = 2$ donc $V_1 - V_0 \neq V_2 - V_1$ donc $\left(V_n\right)$ n'est pas une suite arithmétique.

   $\frac{V_1}{V_0} = 1$ et $\frac{V_2}{V_1} = 3$ donc $\frac{V_1}{V_0} \neq \frac{V_2}{V_1}$ donc $\left(V_n\right)$ n'est pas une suite géométrique.

2. On définit la suite $\left(W_n\right)$ sur $\mathbb{N}$ par $W_n = V_n + 2n + 1$.

   a) Pour tout entier naturel n,

$W_{n+1} = V_{n+1} + 2\left(n+1\right) + 1 = 2V_n + 2n - 1 + 2n + 3 = 2V_n + 4n + 2 = 2\left(V_n + 2n + 1\right) = 2W_n$

donc $\left(W_n\right)$ est une suite géométrique dont on donnera la raison 2.

   b) Pour tout entier naturel n, $W_n = W_0.2^n = \left(V_0 + 1\right)2^n = 2.2^n = 2^{n+1}$

d'où $V_n = W_n - 2n - 1 = 2^{n+1} - 2n - 1$ en fonction de n .

   c) $V_9 = 2^{10} - 19 = 1005$

Exercice 3 :

1. Soit O le centre de R . R(A) = A’ équivaut à $\begin{cases} OA = OA' \\ \widehat{AOA'} = \dfrac{\pi}{3} \quad (\text{direct}) \end{cases}$ donc le triangle OAA’ est équilatéral et de sens direct .

2. a) B’ = R(B) équivaut à $\begin{cases} OB = OB' \\ \widehat{BOB'} = \dfrac{\pi}{3} \quad (\text{direct}) \end{cases}$ donc le triangle OBB’ est équilatéral et de sens direct .

   $A'' = R(A')$ voir figure.

   b) On a : R(A) = A’ et r(B) =B’ donc r((AB)) = (A’B’) .
   et r(A’) = A″ donc R((AA’)) = (A’A″).

   Or les droites (AA’) et (AB) sont perpendiculaires alors les droites (A’B’) et (A’A″) sont perpendiculaires.

3. I le milieu du segment [BA’] donc I’ = R(I) est le milieu du segment R([BA’]) = [B’ A″].
   Comme le triangle BA’ A″ est rectangle en A’ alors I’ est le centre du cercle circonscrit au triangle BA’ A″ d’où I’A’= I’ A″ .
   Or OA’ = O A″ alors (OI’) est la médiatrice du segment $[A'A'']$.

5. Soit J le point d’intersection de droites (AB) et (A’B’) et J’ = R(J).
   J appartient à la droite (AB) donc J’ appartient à R((AB)) = (A’B’)

D’où les points J, J’, A’ et B’ sont alignés.