

devoir de controle N°4

Exercice n°1 : (3 points)

Répondre par « Vrai » ou « Faux » à chacune des questions suivantes , aucune justification n'est demandée.

1) (U_n) est une suite géométrique, on pose : $S = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4$.

Si la raison $q = 2$ et $S = 155$ alors $U_0 = 5$

2) Si (U_n) est une suite arithmétique alors $\frac{U_{100} + U_{300}}{2} = U_{200}$.

3) Si $U_n = \frac{7^{2n-2}}{5^{n+1}}$ alors (U_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{343}{5}$.

Exercice n°2 : (5 points)

Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par : $U_n = 2n+7$.

1) Prouver que (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$.

2) Soit la somme $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$, avec $n > 0$.

a) Montrer que $S_n = n^2 + 8n + 7$.

b) Déterminer n pour que $S_n = 475$.

Exercice n°3 : (6 points)

Soit la suite (V_n) la suite géométrique de raison $q > 0$ telle que $V_2 = 7$ et $V_4 = 63$.

1) Déterminer le terme général V_n .

2) Déterminer n pour que $V_n = 5103$.

2) Calculer la somme $S = 7 + 21 + 63 + \dots + 5103$.

Exercice n°4 : (6 points)

ABC est un triangle équilatéral **direct**. On désigne par (\mathcal{C}) le cercle du centre A et passant par B et C.

1) Soit : $I = S_{(AC)}(B)$.

a) Montrer que $I \in \mathcal{C}$.

b) Quelle est la nature du quadrilatère ABCI ?

2) Soit r la rotation indirecte de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Justifier que $r(C) = A$.

b) Construire le point $D = r(A)$. montrer que A est le milieu de [BD].

3) La droite (BI) coupe (AC) en J. on pose K est milieu de [AD].

Montrer que le triangle IJK est équilatéral.

4) La parallèle Δ à (AI) passant par D coupe (AC) en E.

a) Déterminer $r((AD))$ et $r((CB))$.

b) En déduire que $r(B) = E$.

Exercice 1:

1. **Vrai** ; 2. **Vrai** ; 3. **Faux** .

Exercice 2:

1. Pour tout entier naturel n , $U_{n+1} - U_n = 2(n+1) + 7 - (2n+7) = 2n+2+7-2n-7 = 2$.

2. a) $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = (n+1) \cdot \frac{U_0 + U_n}{2} = (n+1) \cdot \frac{7 + (2n+7)}{2} = (n+1) \cdot (n+7)$

donc $S_n = n^2 + 8n + 7$.

b) $S_n = 475$ équivaut à $n^2 + 8n + 7 = 475$ équivaut à $n^2 + 8n - 468 = 0$.

Réolvons dans l'ensemble \mathbb{R} l'équation : $x^2 + 8x - 468 = 0$

son discriminant réduit est $\Delta' = 4^2 - (-468) = 16 + 468 = 484 = 22^2$, donc l'équation admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-4 + 22}{1} = 18 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 - 22}{1} = -26.$$

Comme $-26 \notin \mathbb{N}$ alors $n = 18$.

Exercice 3:

1. Comme $V_4 = V_2 \times q^2$ et $q > 0$ alors $q^2 = \frac{V_4}{V_2} = \frac{63}{7} = 9$ et $q > 0$.

Par suite : $q = 3$.

Cherchons le premier terme $V_2 = V_0 \times q^2$ équivaut à $V_0 = \frac{V_2}{q^2}$ équivaut à $V_0 = \frac{7}{9}$

Ainsi , pour tout entier n : $V_n = V_0 \times q^n = \frac{7}{9} \times 3^n = 7 \times 3^{n-2}$.

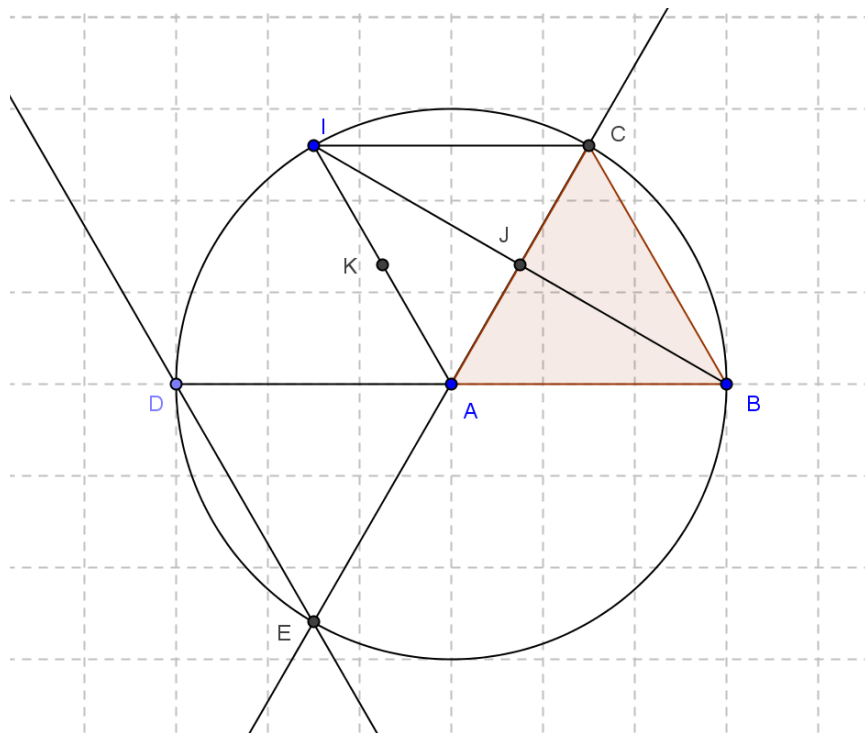
2. $V_n = 5103$ équivaut à $7 \times 3^{n-2} = 5103$ équivaut à $3^{n-2} = 729$ équivaut à $3^{n-2} = 3^6$ équivaut à $n - 2 = 6$ équivaut à $n = 8$.

3. $S = 7 + 21 + 63 + \dots + 5103 = V_2 + V_3 + V_4 + \dots + V_8 = V_2 \cdot \frac{1 - q^7}{1 - q} = 7 \cdot \frac{1 - 3^7}{1 - 3} = \frac{7}{2} \times 2186$

D'où $S = 7651$.

Exercice 4:

1. Figure :



a) $I = S_{(AC)}(B)$ donc $AI = AB$. Comme B est un point du cercle \mathcal{C} alors I appartient à \mathcal{C} .

b) ABC est un triangle équilatéral et $I = S_{(AC)}(B)$ donc ABCI est un losange.

2. a) On a : $IC = IA$ et $\widehat{CIA} = \frac{\pi}{3}$ (dans le sens indirect) donc $r(C) = A$.

b) $r(D) = A$ équivaut à DIA est un triangle équilatéral indirect.

On a : $AB = AI$ et $AI = AD$ donc $AB = AD$.

D'autre part : $\widehat{BAD} = \widehat{BAI} + \widehat{IAD} = 2\widehat{BAC} + \widehat{IAD} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$.

Ainsi : A est le milieu du segment [BD].

3. J est le centre du losange ABCI donc J est le milieu du segment [AC].

IL en résulte : $r(J)$ est le milieu de segment $r([AC]) = [DA]$.

Or K est le milieu du segment [AD] donc $r(J) = K$. Par suite, **le triangle IJK est équilatéral.**

4. a) (AD) est la parallèle à (IC) passant par A donc $r((AD))$ est la parallèle à $r((IC)) = (IA)$ et passant par $r(A) = D$ d'où **$r((AD)) = \Delta$** .

(CB) est la parallèle à (AI) passant par C donc $r((CB))$ est la parallèle à $r((AI)) = (ID)$ passant par $r(C) = A$ d'où **$r((CB)) = (CA)$** .

b) On a : $\{B\} = (AD) \cap (CB)$ donc $\{r(B)\} = r((AD)) \cap r((CB)) = \Delta \cap (CA) = \{E\}$

Donc **$r(B) = E$** .