Exercice1 : (5 points)

Répondre par Vrai ou Faux aux cinq questions ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

Soit ($\mathcal{C}$) un cercle de centre O, A un point de ce cercle et (D) la tangente à ($\mathcal{C}$) en A.

Soit r la rotation directe de centre O et d'angle α appartenant à $]0,\pi[$.

L'image de A par la rotation r est le point B. (Δ) est la tangente à ($\mathcal{C}$) en B.

1) Le point B appartient au cercle ($\mathcal{C}$).

2) A est l'image de B par la rotation indirecte de centre O et d'angle α .

3) L'image du cercle ($\mathcal{C}$) est un cercle ($\mathcal{C}'$) de centre B et de rayon OA.

4) L'image de (D) par la rotation r est parallèle à (D).

5) Soit C le point d'intersection de (D) et (Δ). OACB est un carré lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2 : (5 points)

Une usine a produit 3500 tonnes de ciments au cours de l'année 1990.

La production a ensuite diminué régulièrement de 15% par an jusqu'à la fin de l'année 2000.

On note P_n la production en tonnes de cette usine au cours de l'année (1990 + n).

Ainsi $P_0 = 3500$.

1. Vérifier que $P_1 = 2975$ et calculer P_2.

2. a) Montrer que la suite (P_n) est géométrique et déterminer sa raison.

   b) Exprimer, pour $n \le 10$, P_n en fonction de n et calculer la production de cette usine au cours de l'année 2000.

Exercice 3 : (4 points)

Soit (U_n) la suite géométrique de troisième terme 12 et de sixième terme -96.

1. Montrer que la raison de (U_n) est q = -2 et son premier terme est $U_0 = 3$.

2. Donner U_n en fonction de n.

3. Vérifier que pour tout entier n, $S_n = U_0 + U_1 + ...U_n = 1-(-2)^{n+1}$

Exercice 4 : (6 points)

Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle rectangle en A tel que $\text{ABC} = \frac{\pi}{3}$, ($\mathscr{C}$) est son cercle circonscrit et O est le milieu de [BC]. On désigne par r la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On appelle (Δ) la tangente au cercle ($\mathscr{C}$) en B.

1. a) Montrer que r(B) = O.

b) Placer le point O' = r(O). Montrer que $\text{r}(\Delta)$ est la médiatrice de [AB].

c) Construire ($\mathscr{C}$') l'image de ($\mathscr{C}$) par r.

2. Soit C' = r(C) , montrer que C' est le symétrique de O par rapport à O'.

3. Soit M un point quelconque de l'arc $\left[\text{AC}\right]$ ne contenant pas B du cercle ($\mathscr{C}$) et r(M) = M'.

Déterminer l'ensemble des point M' , lorsque m décrit l'arc $\left[\text{AC}\right]$ ne contenant pas B.

Corrigé

Exercice 1 :

1. Vrai ; 2. Vrai ; 3.Faux ; 4.Faux ; 5.Vrai

Exercice 2 :

1. $P_1 = 3500 \times (1 - 0{,}15) = 3500 \times 0{,}85 = 2975$.

$P_2 = 2975 \times (1 - 0{,}15) = 2975 \times 0{,}85 = 2528{,}750$.

2. a) On sait que :

P_n la production en tonnes de cette usine au cours de l'année (1990 + n),

P_{n+1} la production en tonnes de cette usine au cours de l'année (1990 + (n+1))

$P_{n+1} = P_n \times (1 - 0{,}15) = 0{,}85 \times P_n$ donc (P_n) est une suite géométrique de raison q = 0,85.

b) Pour $n \leq 10$, $P_n = P_0 \times (0{,}85)^n = 3500 \times (0{,}85)^n$.

La production de cette usine au cours de l'année 2000 est : $P_{10} = 3500 \times (0{,}85)^{10} \approx 689{,}06$ tonnes.

Exercice 3 :

Soit (U_n) la suite géométrique de troisième terme 12 et de sixième terme -96.

1. On a : $U_2 = 12$ et $U_5 = -96$.

Soit q la raison de la suite (U_n), $U_5 = U_2 \times q^3$ donc $q^3 = \frac{U_5}{U_2} = -\frac{96}{12} = -8$ d'où q = -2.

D'autre part : $U_2 = 12$ équivaut à $U_0 \times q^2 = 12$ équivaut à $U_0 = \frac{12}{q^2}$ équivaut à $U_0 = 3$.

2. Pour tout entier naturel n, on a : $U_n = U_0 \times q^n = 3 \times (-2)^n$.

3. Vérifier que pour tout entier n, $S_n = U_0 + U_1 + ...U_n = U_0 \frac{1-(-2)^{n+1}}{1-(-2)} = 3\frac{1-(-2)^{n+1}}{3} = 1-(-2)^{n+1}$

Exercice 4 :

1. a) A , B et C appartiennent au cercle ($\mathscr{C}$) de centre O donc OA = OB = OC.

Or $\widehat{ABO} = \widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$ ce qui implique le triangle OAB est équilatéral.

D'où $\begin{cases} OA = OB \\ \widehat{BAO} = \frac{\pi}{3} \quad \text{(direct)} \end{cases}$ ou encore r(B) = O.

b) Soit O' = r(O). (Δ) est le perpendiculaire en B à la droite (OB) donc $r(\Delta)$ est la perpendiculaire en r(B) = O' à la droite r((OB)) = (OO') . Or (OO') est parallèle à (AC) d'où $r(\Delta)$ est perpendiculaire à (AB) et comme OA = OB alors $r(\Delta)$ est médiatrice de [AB].

c) ($\mathscr{C}$ ') l'image de ($\mathscr{C}$) par r est le cercle de centre r(O) = O' et de même rayon que ($\mathscr{C}$).

2. Soit C' = r(C) , O est le milieu du segment [BC] donc O' est le milieu du segment s([BC]) = [OC'] d'où C' est le symétrique de O par rapport à O'.

3. Lorsque M décrit l'arc $\left[AC\right]$ ne contenant pas B du cercle ($\mathscr{C}$) , r(M) = M' décrit l'arc r $\left(\left[AC\right]\right) = \left[AC'\right]$ ne contenant pas r(B) = O du cercle ($\mathscr{C}$ ')