Exercice 1 : (4 points)

Répondre, sans justification, par Vrai ou Faux aux propositions suivante. .

1. a étant un entier naturel non nul. Si 4 divise a et 6 divise a alors 24 divise a.
2. Pour tout entier naturel n, $4^{13}+2^{28}$ est divisible par 10.
3. Si n est un entier naturel pair et non nul alors (n + 1) divise (1 + 2 + … + n).

Exercice 2 : (8 points)

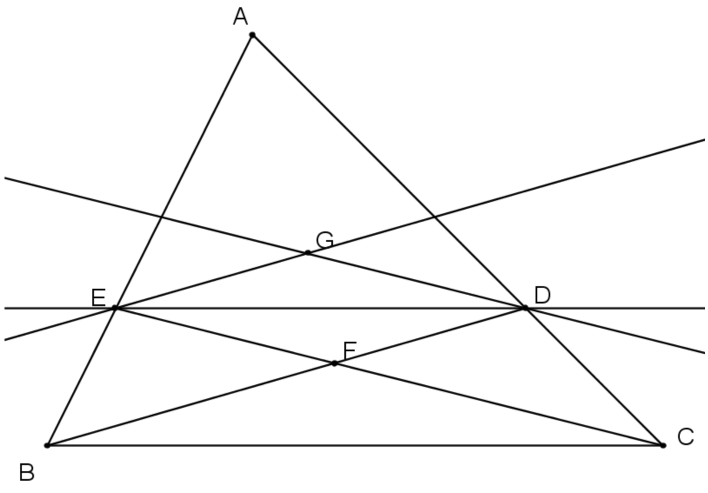
Soit (U_n) la suite arithmétique de deuxième terme $U_1 = 1$ et de cinquième terme $U_4 = 13$.

1. Vérifier que la raison de la suite (U_n) est $r = 4$.

2. Calculer U_0 , U_2 et U_3.
3. Déterminer l'entier naturel p pour lequel $U_p = 197$.
4. Soit n un entier naturel, on pose : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n$.
   a) Exprimer S_n en fonction de n.
   b) Calculer alors $S_n = -3+1+5+9+...+197$

Exercice 3: (8 points)

Soit ABC un triangle et E un point du segment [AB] . La parallèle à (BC) passant par E coupe [AC] en D. Les diagonales du trapèze BCDE se coupent en F. La parallèle à (BD) passant par E et la parallèle à (CE) passant par D se coupent en G.
Voir figure ci-contre.
Soit h l'homothétie de centre A qui envoie B sur E.



1. a) Montrer que h(C) = D.
   b) Déterminer (Γ') l'image par h du cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC.
2. Déterminer (𝒞') l'image par h du cercle (𝒞) de diamètre [BC].
3. a) Déterminer h((BD)) et h((CE)).
   b) En déduire h(F).
4. La droite (AF) coupe le segment [DE] en L et coupe le segment [BC] en K.
   a) Montrer que h(K) = L.
   b) En déduire que K est le milieu du segment [BC].

Corrigé

Exercice 1 :

1. Faux. ; 2. Vrai ; 3. Vrai

Exercice 2 :

Soit (U_n) la suite arithmétique de premier terme $U_0 = -3$ et de cinquième terme $U_4 = 13$.

1. la raison de la suite (U_n) est $r = \dfrac{u_4 - u_1}{4-1} = \dfrac{12}{3} = 4$.

2. $U_0 = U_1 - r = -3$; $U_2 = U_1 + r = 5$; $U_3 = U_2 + r = 9$.
3. On sait que $U_p = U_0 + pr = -3 + 4p$.

   $U_p = 197$ équivaut à $-3+4p = 197$ équivaut à $p = 50$.
4. Soit n un entier naturel, on pose : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n$.

   a) $S_n = (n+1)\dfrac{U_0 + U_n}{2} = (n+1)\dfrac{(-3-3+4n)}{2} = (n+1)(-3+2n) = 2n^2 - n - 3$.

   b) $S = -3+1+5+9+...+197 = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_{50} = (50+1)\times(-3+100) = 51\times 97 = 4947$

Exercice 3:

1. a) Soit h(C) = C' :
   A , C et C' sont alignés donc C' appartient à la droite (AC).
   D'autre part , h((BC)) est la parallèle à (BC) passant par h(B)= E donc h((BC)) = (ED) d'où C' appartient à (ED).
   Comme D est le point d'intersection des droites (AC) et (ED) alors C' = D.
   Ainsi, h(C)= D.
   b) On h(A) = A , h(B) = E et h(C) = D alors l'image par h du cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC est le cercle (Γ') circonscrit au triangle AED.
2. $(\mathscr{C})$ est le cercle de diamètre [BC] et h([BC]) = [ED] donc $h(\mathscr{C}) = (\mathscr{C}')$ le cercle de diamètre [ED].
3. a) h((BD)) est la parallèle (BD) passant par h(B) = E donc h((BD)) = (EG)
   et h((CE)) est la parallèle à (CE) passant par h(C)= D donc h((CE))= (DG).

   b) F est le point d'intersection des droites (BD) et (CE) donc h(F) est le point d'intersection des droites (EG) et (DG) d'où h(F) = G.

4. a) On a d'une part:

   K appartient au segment [BC] donc h(K) appartient au segment h([BC]) = [ED]

Et d'autre part , h(K) appartient à la droite (AK)

Or (AK) coupe [ED] en L donc h(K) = L .

c) EFDG est un parallélogramme de centre L et comme L = h(K) alors K est milieu de [BC].