Lycee El Hedi Ben Hsin Jendouba

Devoir de contrôle n° 02

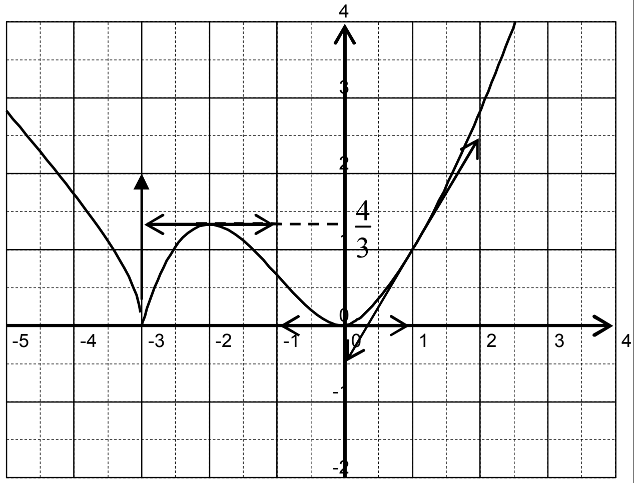
Niveau : 3ème Sciences

Durée : 2 heures

Exercice n°1(4,5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

On a représenté ci-contre la courbe représentative $\left(C\right)$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$



❶- a) Déterminer $f'(-2)$; $f'(0)$; $f(1)$ et $f'(1)$

b) Déterminer l'équation du tangente T à C en 1

c) Calculer $\lim\limits_{x\to 1} 2\left(\dfrac{f(x)-1}{x-1}\right)$

❷-Déterminer le réel x_0 où f n'est pas dérivable .

Justifier la réponse .

❸- Dresser le tableau de variation de f

Exercice n°2(9 points)

I] Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2+8x+7}{x-1}$

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

❶-a) Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$. Interpréter le résultat .

b) Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

❷-a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$: $f(x)=x+9+\dfrac{16}{x-1}$

b) En déduire que la droite $\Delta : y=x+9$ est un asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

❸- a) Déterminer D l'ensemble où f est dérivable et que pour tout $x\in D$ on a $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-15}{(x-1)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f

❹-Calculer $f(-1)$ et $f(-7)$ puis déduire le signe de f .

II] Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+8x+7}{x-1} & ;\ si\ x\le 0\\ x\sqrt{2x+3}-7 & ;\ si\ x>0\end{cases}$

❶-a)Etudier la dérivabilité de g à droite et à gauche en 0

b)Interpréter le résultat géométriquement .

❷-a) Montrer que g est dérivable sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$

b) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $g'(x)=\dfrac{3x+3}{\sqrt{2x+3}}$

❸- Soit $a\in]0,+\infty[$, déterminer le point A de C_h d'abscisse a où la tangente à C_h en A est parallèle à la droite $D : y=4x-1$

Exercice n°3(6,5 points)

❶-Soit $f(x)=\sin 2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

a) Calculer $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$; $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $f(x+k\pi)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}$.

❷Soit $g(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$

a) Calculer $g(0)$ et $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

b) Montrer que $g(x)=2\cos\left(x-\dfrac{5\pi}{6}\right)$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $g(x)=0$

❸ Soit $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, Déterminer D_f l'ensemble de définition de f .

a) Montrer que pour tout $x\in D_f$: $h(x)=-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi,\pi]$, l'équation $h(x)=\dfrac{1}{2}$

©-Bon travail-©

CORRECTION(proposee par Guesmi.B)

EXERCICE1

1)a) f'(-2)=0 (tangente horizentale)

De meme f '(0)=0

La tangente au point d'abscisse 1 passe par A(1,1) et B(0,-1/2)

Donc $f'(1) = \frac{1-(-\frac{1}{2})}{1-0} = \frac{3}{2}$

f(1)=1

b)T :y= f '(1)(x-1)+f(1)

donc T : y=$\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

c)2 $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = 2f'(1) = 3$

2)au point d'abscisse x_0=-3 la tangente à la courbe est verticale

Donc f n'est pas derivable en -3

3)

X	$-\infty$		-3		-2		0		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

EXERCICE2

I)1)a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ $puisque(x-1<0)$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ car $(x-1>0)$

b)$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

2)a) x+9+$\frac{16}{x-1} = \frac{(x+9)(x-1)+16}{x-1} = f(x)$

b)$\lim_{|x|\to +\infty} f(x) - (x+9) = 0$ $donc$ $\Delta: y = x + 9$ est une $asymptote$ en ∞

3)a)f est une fonction rationnelle donc elle est derivable sur son ensemble

De definition IR-{-}

Et $f'(x) = \frac{(2x+8)(x-1)-(x^2+8x+7)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-15}{(x-1)^2}$

b)le signe de f'(x) est le meme que celui de $x^2 - 2x - 15; car\ (x-1)^2 > 0\ , \forall x \neq 1$

on calcule $\Delta = 64$ on trouve x=-3 ou x=5

x	$-\infty$		-7		-3		-1		1		5		$+\infty$
f '(x)		+		+	0	-		-	‖	-		+	
f(x)	-∞	↗	0	↗	2	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	18	↗	$+\infty$

f(-1)=0 et f(-7)=0

donc d'apres le tableau de variation

on a le tableau de signe de f(x)

x	$-\infty$		-7		-1		1		$+\infty$
f(x)		-	0	+	0	-	‖	+	

II)1)a) d'apres I)3)a) g'(0)= -15

Reste a voir g'$_g$(0)=$\lim_{h \to 0^+} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \sqrt{3} \neq -15$ *donc g n'est pas derivable en* 0

b)g est derivable à droite et à gauche en 0 mais n'est pas derivable en 0

donc le point B(0,-7) est un point anguleux

2)a)d'apres 1)a)

b)pour x>0 on a : g'(x)=$\sqrt{2x+3} + \frac{2x}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{3(x+1)}{\sqrt{2x+3}}$

3) g'(a)=4 et a>0 puis a$> -3/2$

On trouve l'equation 19a^2-14a-39=0

Donc a=$-\frac{13}{18} < -\frac{3}{2}$ *ne convient pas ou* $a = \frac{32}{9} > -\frac{3}{2}$ *convient*

EXERCICE3

1)f($\frac{\pi}{2}$) $= 0\ \ et\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ f(x + k\pi) = f(x)$

2)a)g(0)=$-\sqrt{3}, g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

b)$a = -\sqrt{3}\,, b = 1\ et\ r = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\ \ , cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} et\ sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{1}{2}\ donc\ \varphi = \frac{5\pi}{6}$

alors $g(x) = 2\cos\,(x - \frac{5\pi}{6})$

c)g(x)=0$\Leftrightarrow x - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in IZ\ donc\ x = \frac{3\pi}{2} + k\pi$

3)a) d'apres 1)b et 2)b on a h(x)=sin($\frac{\pi}{6} - x) = -\sin\,(x - \frac{\pi}{6})$

3)b) on a : $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ou\ \frac{\pi}{6} - x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Donc $x = 2k\pi\ ou\ x = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi\ \ , k \in IZ$

Dans $]-\pi, \pi]\ \ on\ a : x = \frac{-2\pi}{3}$