Exercice 1
Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$

1. Etudier la fonction g sur $\mathbb{R}$, préciser les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$. Dresser le tableau de variation de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
3. Préciser le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction définie, pour tout réel x différent de 1, par : $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3-1}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ en déduire les limites de f en 1.

On admet que, pour tout réel x différent de 1, $f'(x) = \dfrac{-2x^3 - 3x^2 - 1}{(x^3-1)^2}$

3. En utilisant les questions précédentes, déterminer les variations de la fonction f sur les intervalles où elle est définie.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point A(0 ; – 1).
5. Montrer que $f(x) - (-x-1)$ a le même signe que $\dfrac{x(x+1)}{x-1}$. En déduire la position de C par rapport à la droite T.

Exercice 2
Partie A

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x - \dfrac{2}{\pi}x$. Déterminer un encadrement de $f(x)$, en déduire la limite en $+\infty$ et $-\infty$ de f.

Partie B

On souhaite démontrer l'inégalité suivante: pour tout $x \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$: $\sin x \geq \dfrac{2}{\pi}x$

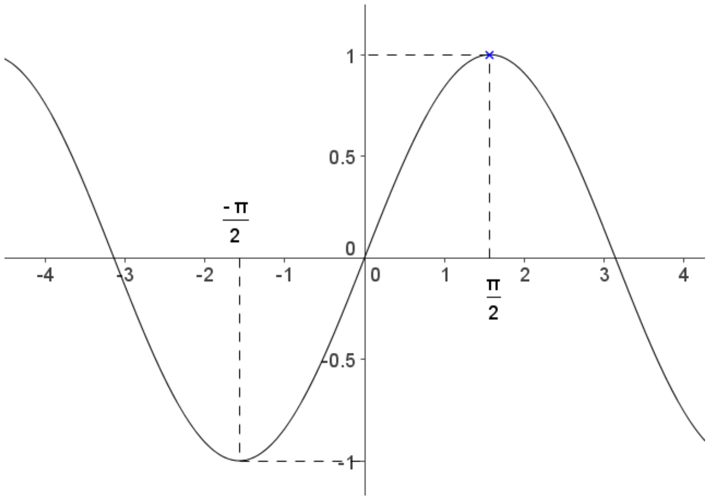
On considère alors la fonction f définie par : $f(x) = \sin x - \dfrac{2}{\pi}x$ sur l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

1. Déterminer f' et f'', les dérivée et dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. Montrer que la fonction f' est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Dresser son tableau de variations.
3. Montrer qu'il existe un unique réel a de l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $f'(a) = 0$.

   Vérifier que $0,880 < a < 0,881$. En déduire le signe de la fonction f' sur l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
4. Déduire de ce qui précède les variations de la fonction f que l'on résumera dans un tableau.
5. Démontrer alors que pour tout $x \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a la minoration suivante: $\sin x \geq \dfrac{2}{\pi}x$
6. Sur le graphique suivant est représenté sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ la sinusoïde associée à la fonction sinus.

   Représenter la droite d'équation $y = \dfrac{2}{\pi}x$. Faire une interprétation graphique de ce résultat.

Guesmi.B



Guesmi.B

CORRECTION

Exercice 1

Partie A

1. g est un polynôme donc sa limite à l'infini est la même que celle de son terme de plus haut degré :

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$ et

$g'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x + 1)$; $g'(x)$ est un polynôme du second degré qui s'annule en 0 et – 1 donc :

x	$-\infty$		α		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$			$+$		0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. g est définie continue strictement croissante sur $]-\infty ; -1]$; $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ et $g(-1) = 2$ donc 0 est compris entre $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $g(-1)$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]-\infty ; -1]$.

g est décroissante sur $[-1 ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$ donc admet un minimum en 0 et pour tout x de $[-1 ; +\infty[$, $g(x) \geq 1$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[-1 ; +\infty[$.

L'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$.

$g(-1,67) \approx 0,051774$ et $g(-1,68) \approx -0,016064$ donc $-1,68 \leq \alpha \leq -1,67$

3. g est strictement croissante sur $]-\infty ; -1]$ et $g(\alpha) = 0$ donc si $x < \alpha$ alors $g(x) < 0$; si $\alpha < x < -1$ alors $g(x) > 0$ pour tout x de $[-1 ; +\infty[$, $g(x) \geq 1$ donc $g(x) > 0$ d'où le tableau de signes.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1. f est une fraction rationnelle donc sa limite à l'infini est la même que celle du quotient de ses termes de plus haut degré :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

2. $(x-1)(x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$

$f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \dfrac{x+1}{x^2+x+1} \times \dfrac{1}{x-1}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+1}{x^2+x+1} = \dfrac{2}{3}$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

3. $f'(x) = \dfrac{-2x^3 - 3x^2 - 1}{(x^3-1)^2} = \dfrac{-g(x)}{(x^3-1)^2}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-g(x)$

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	$\parallel$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	0

4. La tangente T à la courbe C au point A(0 ; – 1) est la droite de coefficient directeur $f'(0) = -1$ qui passe par A onc a pour équation $y = -x + b$ et $y_A = x_A + b$ donc $-1 = 0 + b$ donc l'équation de T est $y = -x - 1$.

$f(x) - (-x-1) = \dfrac{x+1}{x^3-1} - (-x-1) = \dfrac{x+1}{x^3-1} + (x+1) = (x+1)\left(\dfrac{1}{x^3-1} + 1\right) = (x+1)\dfrac{x^3-1+1}{x^3-1} = (x+1)\dfrac{x^3}{x^3-1}$

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ or $x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solution sur R ($\Delta = -3$) donc $x^2 + x + 1 > 0$ sur R.

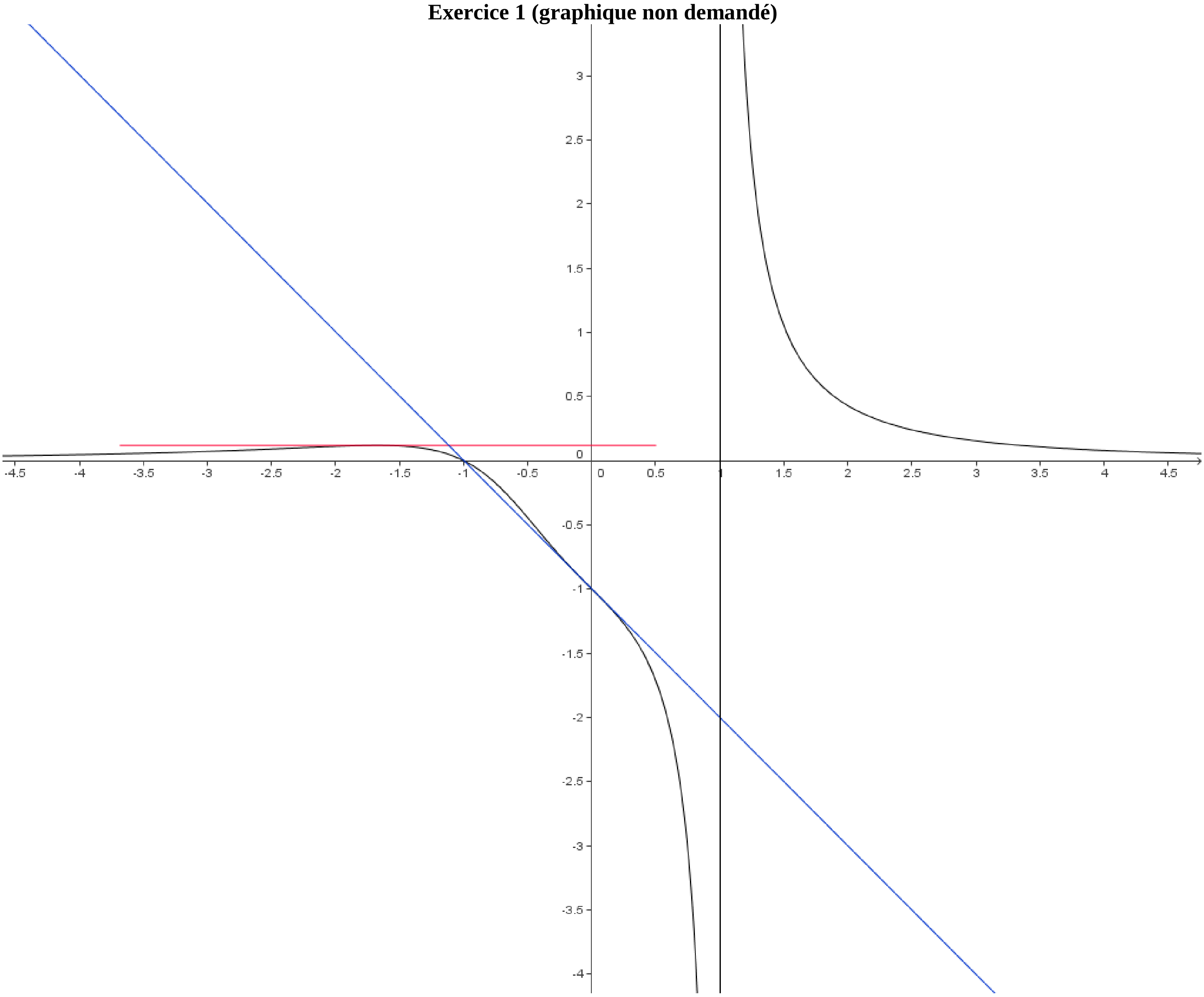
donc $x^3 - 1$ a le même signe sur R que $x - 1$

$f(x) - (x - 1)$ a le même signe que $\dfrac{x(x+1)}{x-1}$

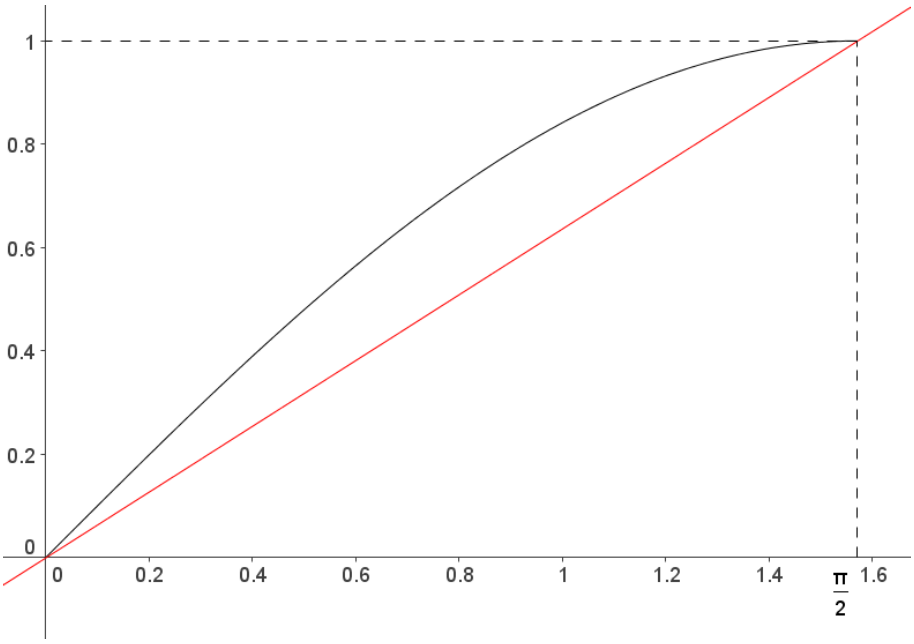
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	$\parallel$	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	$\parallel$	$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	$\parallel$	$+$	
$\dfrac{x(x+1)}{x-1}$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	

La tangente T est en dessous de la courbe C sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]0 ; 1[$; au dessus de la courbe C sur $]-1 ; 0[$ et sur $]1 ; +\infty[$; coupe la courbe aux points d'abscisse – 1 et 0.

Exercice 1 (graphique non demandé)



Exercice 2



Guesmi.B

Exercice 2
Partie A

Pour tout x réel, $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $-1-\frac{2}{\pi}x \leq f(x) \leq 1-\frac{2}{\pi}x$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} -1-\frac{2}{\pi}x = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{\pi}x = -\infty$ donc d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Partie B

1. $f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$ et $f''(x) = -\sin x$

2. Pour tout x de $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x > 0$ donc $f''(x) < 0$ et $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc la fonction f' est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$-$			0
f'	$1-\frac{2}{\pi}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{\pi}$

3. f' est définie continue strictement décroissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$; $f'(0) = 1-\frac{2}{\pi}$ donc $f'(0) > 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}$ donc $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ donc 0 est compris entre $f'(0)$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution a sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

$f'(0{,}880) \approx 0{,}0005$ et $f'(0{,}881) \approx -0{,}0002$ donc $0{,}880 < a < 0{,}881$.

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
f'	$1-\frac{2}{\pi}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{\pi}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

4.

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

5. Pour tout $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \geq 0$ donc $\sin x - \frac{2}{\pi}x \geq 0$ donc $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$

6. La droite d'équation $y = \frac{2}{\pi}x$ passe par l'origine du repère et par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}\,;1\right)$ d'où le tracé. Le calcul précédent permet d'affirmer que la sinusoïde est su dessus de la droite sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.