EXERCICE 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

On appelle J le point d'affixe i .

1. On considère les points A, B, C, H d'affixes respectives

$$a = -3 - \mathrm{i},\ b = -2 + 4\,\mathrm{i},\ c = 3 - \mathrm{i} \text{ et } h = -2.$$

Placer ces points sur une figure, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2. Montrer que J est le centre du cercle C circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon du cercle C .

3. Calculer, sous forme algébrique, le nombre complexe $\dfrac{b-c}{h-a}$. En déduire que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

Dans la suite de l'exercice, on admet que H est l'orthocentre du triangle ABC, c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC.

4. On note G le centre de gravité du triangle ABC. Déterminer l'affixe g du point G. Placer G sur la figure.

5. Montrer que le centre de gravité G, le centre du cercle circonscrit J et l'orthocentre H du triangle ABC sont alignés. Le vérifier sur la figure.

6. On note A' le milieu de [BC] et K celui de [AH]. Le point A' a pour affixe $a' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\,\mathrm{i}$.

a. Déterminer l'affixe du point K.

b. Démontrer que le quadrilatère $KHA'J$ est un parallélogramme.

EXERCICE 2

Partie I : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b, c.

On suppose que A et B sont distincts, ainsi que A et C.

On rappelle que $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(b - a) \quad [2\pi]$.

Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \quad [2\pi]$.

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère le point A d'affixe 1 + i.

On associe, à tout point M du plan d'affixe z non nulle, le point M′ d'affixe : $z' = \dfrac{z - 1 - \mathrm{i}}{z}$.

Le point M′ est appelé le point image du point M.

1. ***a.*** Déterminer, sous forme algébrique, l'affixe du point B′, image du point B d'affixe i.

b. Montrer que, pour tout point M du plan d'affixe z non nulle, l'affixe z' du point M′ est telle que $z' \neq 1$.

2. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M′ est telle que $|z'| = 1$.

3. Quel est l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M′ est un nombre réel ?

Guesmi.B

EXERCICE 1

1.

2. $JA^2 = |\,3 - 2\,\mathrm{i}\,|^2 = 13$ et $JB^2 = |\,-2 + 3\,\mathrm{i}\,|^2 = 13$ et

$JC^2 = |\,3 - 2\,\mathrm{i}\,|^2 = 13$ donc $JA = JB = JC$ donc J est le centre du cercle C circonscrit au triangle ABC, le rayon du cercle C est $\sqrt{13}$.

3. $\dfrac{b-c}{h-a} = \dfrac{-5+5\,\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = 5\,\mathrm{i}$ donc $\arg\left(\dfrac{b-c}{h-a}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$ soit $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB}) = \dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

4. G est le centre de gravité du triangle ABC donc son affixe

$g = \dfrac{1}{3}(a + b + c) = \dfrac{1}{3}(-3 - \mathrm{i} - 2 + 4\,\mathrm{i} + 3 - \mathrm{i})$

$g = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3}\,\mathrm{i}$.

5. $\overrightarrow{JG}$ a pour affixe $-\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3}\,\mathrm{i} - \mathrm{i} = -\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}\,\mathrm{i}$, $\overrightarrow{JH}$ a pour affixe $-2 - \mathrm{i}$ donc $\overrightarrow{JH} = 3\,\overrightarrow{JG}$ donc le centre de gravité G, le centre du cercle circonscrit J et l'orthocentre H du triangle ABC sont alignés.

6. *a.* K a pour affixe $k = \dfrac{1}{2}(a + h) = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}$

b. $\overrightarrow{HA'}$ a pour affixe $a' - h$ soit $\dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}\,\mathrm{i}$, $\overrightarrow{KJ}$ a pour affixe $\dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}\,\mathrm{i}$ donc $\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{KJ}$ donc le quadrilatère $KHA'J$ est un parallélogramme.

Exercice 2

Partie I : Restitution organisée de connaissances

$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = (\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}) - (\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AB}})\ [2\pi]$.

$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \arg(c - a) - \arg(b - a)\qquad [2\pi]$.

$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\qquad [2\pi]$.

Guesmi.B

Partie II :

1. *a.* L'affixe du point B′, image du point B d'affixe i est $b' = \dfrac{\mathrm{i} - 1 - \mathrm{i}}{\mathrm{i}}$

$b' = \dfrac{-1}{\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}^2}{\mathrm{i}}$ donc $b' = \mathrm{i}$.

b. $z' - 1 = \dfrac{z - 1 - \mathrm{i}}{z}\ 1 = -\dfrac{1+\mathrm{i}}{z}$, pour tout $z \neq 0$, $\dfrac{1+\mathrm{i}}{z} \neq 0$ donc $z' \neq 1$.

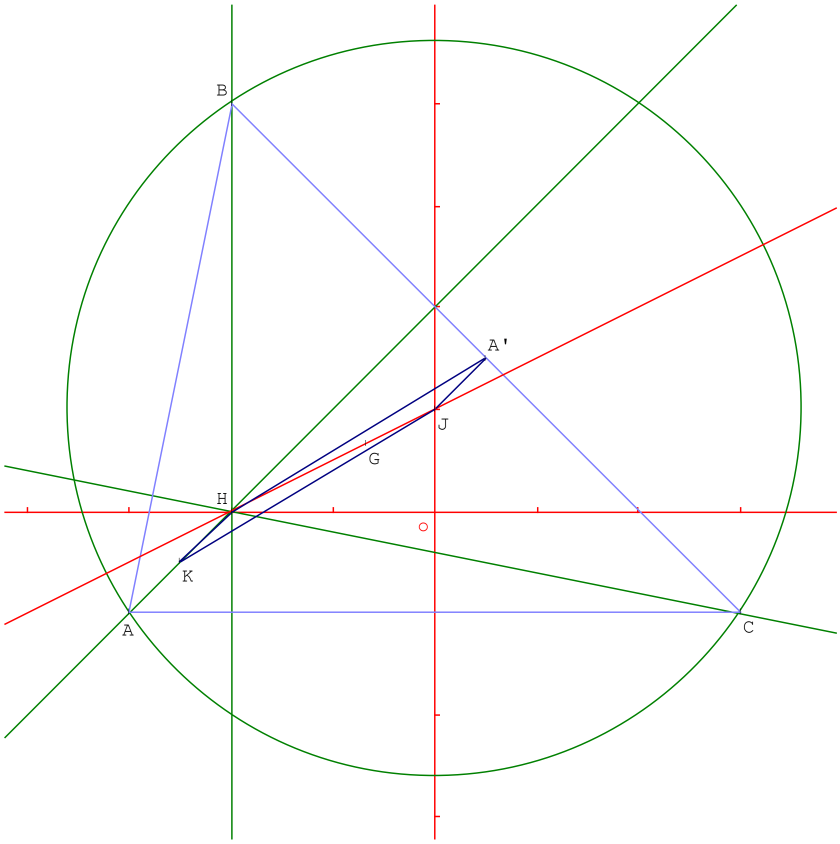
Pour tout point M du plan d'affixe z non nulle, l'affixe z' du point M′ est telle que $z' \neq 1$.

2. $|\,z'\,| = 1 \Leftrightarrow |\,z - 1 - \mathrm{i}\,| = |\,z\,| \Leftrightarrow \mathrm{AM} = \mathrm{OM} \Leftrightarrow$ M décrit la médiatrice de [OA]

3. L'affixe du point M′ est un nombre réel $\Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\dfrac{z - 1 - \mathrm{i}}{z} = k$ avec $z \neq 0$

$\Leftrightarrow z - 1 - \mathrm{i} = k\,z$ avec $z \neq 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}} = k\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ avec $\mathrm{M} \neq \mathrm{O} \Leftrightarrow$ O, A et M alignés et $\mathrm{M} \neq \mathrm{O}$

L'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M′ est un nombre réel est la droite (OA) privée de O.



Guesmi.B