EXERCICE 1 (13 POINTS)

À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{4\,e^{nx}}{e^{nx}+7}.$$

On désigne par C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

Les courbes C_1, C_2 et C_3 sont données en annexe.

Partie A : Étude de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \dfrac{4\,e^{x}}{e^{x}+7}$

1. Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{4}{1+7\,e^{-x}}$.

2. *a.* Démontrer que la courbe C_1 admet deux asymptotes dont on précisera des équations.

b. Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c. Démontrer que pour tout réel x, $0 < f_1(x) < 4$.

3. *a.* Montrer que l'équation $e^{x} = 7$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$, et déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

b. Vérifier que $f_1(\alpha + x) = \dfrac{4\,e^{x}}{e^{x}+1}$ et que $f_1(\alpha - x) = \dfrac{4}{1+e^{x}}$

Démontrer que le point I_1 de coordonnées $(\alpha\,;\,2)$ est un centre de symétrie de la courbe C_1.

c. Déterminer une équation de la tangente (T_1) à la courbe C_1 au point I_1.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul le point $A\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C_n.

2. *a.* Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, l'équation $e^{nx} = 7$ admet une seule solution β.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul la courbe C_n et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera l'abscisse. On note I_n ce point d'intersection.

c. Placer les points I_1, I_2 I_3 sur le graphique donné en annexe.

d. Démontrer que la tangente (T_n) à la courbe C_n au point I_n a pour coefficient directeur n.

e. Tracer les droites (T_1), (T_2) et (T_3).

EXERCICE 2 (7 POINTS)

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\,)$.

1. Placer les points A, B et D d'affixes respectives

$$z_A = -2-2\,i\,,\ z_B = 2 \text{ et } z_D = -2+2\,i.$$

2. Calculer l'affixe z_C du point C tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer C.

3. On considère la transformation f du plan privé du point B qui, à tout point M d'affixe z, $z \neq 2$, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{z-(-2+2\,i)}{z-2}$

Guesmi.B

a. Déterminer l'affixe du point A' image de A par f.

b. Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que M' appartienne à l'axe des réels.

Représenter Δ sur le graphique précédent.

c. Soit E le point d'affixe $4 - i$. Montrer que les points B, D, E sont alignés.

Déterminer l'affixe du point E' image de E par f. Le résultat est-il cohérent avec les résultat du ***b.*** ?

Bonus

4. Soit M un point de Δ, montrer que $\dfrac{\bar{z}+2+2\,i}{\bar{z}-2}$ est réel, en déduire que le point M_1 d'affixe $\bar{z}$ appartient à la droite (AB) privée de B.

CORRECTION

EXERCICE 1

Partie A :

1. pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{4\,e^x}{e^x+7} = \dfrac{4\,e^x \times e^{-x}}{(e^x+7)\times e^{-x}} = \dfrac{4}{1+7\,e^{-x}}$

puisque $e^x \times e^{-x} = 1$

2. *a.* $f_1(x) = \dfrac{4}{1+7\,e^{-x}}$ donc :

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 4$, la courbe C_1 admet pour asymptote la droite d'équation $y = 4$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = 0$, la courbe C_1 admet pour asymptote la droite d'équation $y = 0$.

b. $f_1(x) = \dfrac{4}{1+7\,e^{-x}}$ or la dérivée de la fonction $\dfrac{1}{u}$ est la fonction $-\dfrac{u'}{u^2}$ et la dérivée de la fonction e^u est la fonction $u'\,e^u$ donc la dérivée de la fonction $x \to e^{-x}$ est la fonction $x \to -e^{-x}$

donc $f'_1(x) = -\dfrac{-4\,e^{-x}}{(1+7\,e^{-x})^2} = \dfrac{4\,e^{-x}}{(1+7\,e^{-x})^2}$ or la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c. la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel x, $1 < 1 + 7\,e^{-x}$ donc $1 > \dfrac{1}{1+7\,e^{-x}} > 0$

donc $4 > \dfrac{4}{1+7\,e^{-x}} > 0$, pour tout réel x, $0 < f_1(x) < 4$.

3. *a.* La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ or 7 est compris entre ces deux limites donc l'équation $e^x = 7$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$.

$e^{1,94} < 7 < e^{1,95}$ donc $1,94 < \alpha < 1,95$

b. $f_1(\alpha + x) = \dfrac{4\,e^{\alpha+x}}{e^{\alpha+x}+7} = \dfrac{4\,e^{\alpha}\,e^x}{e^{\alpha}\,e^x+7} = \dfrac{4\times 7\,e^x}{7\,e^x+7} = \dfrac{4\,e^x}{e^x+1}$.

$e^{\alpha} = 7$ donc $e^{-\alpha}\times e^{\alpha} = 7\,e^{-\alpha}$ donc $7\,e^{-\alpha} = 1$

donc $f_1(\alpha - x) = \dfrac{4}{1+7\,e^{-(\alpha-x)}} = \dfrac{4}{1+7\,e^{-\alpha}\,e^x} = \dfrac{4}{1+e^x}$

$f_1(\alpha + x) + f_1(\alpha - x) = \dfrac{4\,e^x}{e^x+1} + \dfrac{4}{1+e^x} = \dfrac{4(e^x+1)}{e^x+1} = 4 = 2\times 2$ donc le point I_1 de coordonnées $(\alpha\,;\,2)$ est un centre de symétrie de la courbe C_1.

c. $f'_1(x) = \dfrac{4\,e^{-x}}{(1+7\,e^{-x})^2}$ donc $f'_1(\alpha) = \dfrac{4\,e^{-\alpha}}{(1+7\,e^{-\alpha})^2} = \dfrac{4\,e^{-\alpha}}{(1+1)^2}$

$f'_1(\alpha) = e^{-\alpha} = \dfrac{1}{7}$

Une équation de la tangente (T_1) à la courbe C_1 au point I_1 est

$$y = \frac{1}{7}(x-\alpha) + 2 = \frac{1}{7}x + 2 - \frac{\alpha}{7}$$

Partie B :

1. $f_n(x) = \dfrac{4\,\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^{nx}+7}$ donc $f_n(0) = \dfrac{4\,\mathrm{e}^{0}}{\mathrm{e}^{0}+7} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ donc pour tout entier naturel n non nul le point A $\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C_n.

2. *a.* $\mathrm{e}^{nx} = 7$ or l'équation $\mathrm{e}^{x} = 7$ admet une seule solution γ dans $\mathbb{R}$.

Donc $\mathrm{e}^{nx} = 7 \Leftrightarrow n\,x = \gamma \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{n}\gamma$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, l'équation $\mathrm{e}^{nx} = 7$ admet une seule solution $\beta = \dfrac{1}{n}\gamma$.

b. $f_n(x) = 2 \Leftrightarrow 4\,\mathrm{e}^{nx} = 2\,(\mathrm{e}^{nx} + 7) \Leftrightarrow 2\,\mathrm{e}^{nx} = \mathrm{e}^{nx} + 7 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{nx} = 7$
$\Leftrightarrow x = \beta$
Pour tout entier naturel n non nul la courbe C_n et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection d'abscisse β.

c.

$$f\,'_n\ \ x\ = \frac{4\,n\,\mathrm{e}^{nx}\,(\mathrm{e}^{nx}+7) - n\,\mathrm{e}^{nx}\times 4\,\mathrm{e}^{nx}}{(\mathrm{e}^{nx}+7)^2} = \frac{4\,n\,\mathrm{e}^{nx}\,[(\mathrm{e}^{nx}+7)-\mathrm{e}^{nx}]}{(\mathrm{e}^{nx}+7)^2}$$

$$f\,'_n(x) = \frac{28\,n\,\mathrm{e}^{nx}}{(\mathrm{e}^{nx}+7)^2}$$

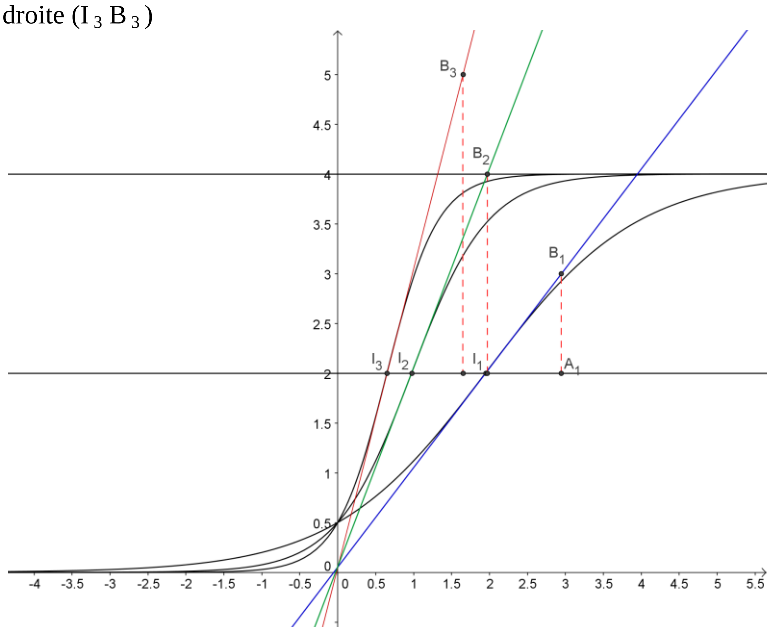
$\mathrm{e}^{n\beta} = 7$ donc $f\,'_n(\beta) = \dfrac{28\,n\,\mathrm{e}^{n\beta}}{(\mathrm{e}^{n\beta}+7)^2} = \dfrac{28\,n\times 7}{(7+7)^2} = n$.

La tangente (T_n) à la courbe C_n au point I_n a pour coefficient directeur n.

d. Pour tracer T_1 : on cherche le point d'intersection de la droite d'équation $y = 2$ et de la courbe C_1, on obtient I_1.
On mesure au compas 1 unité de longueur, on place sur la droite d'équation $y = 2$, le point A_1 ayant pour abscisse $x_I + 1$
puis le point B_1 de même abscisse que A_1 et d'ordonnée $2 + 1 = 3$. (T_1) est la droite $(I_1\,B_1)$.

Pour tracer T_2 : on cherche le point d'intersection de la droite d'équation $y = 2$ et de la courbe C_2, on obtient I_2.
On mesure au compas 1 unité de longueur, on place sur la droite d'équation $y = 2$, le point A_2 ayant pour abscisse $x_I + 2$
puis le point B_2 de même abscisse que A_2 et d'ordonnée $2 + 2 = 3$. (T_2) est la droite $(I_2\,B_2)$.

Pour tracer T_3 : on cherche le point d'intersection de la droite d'équation $y = 2$ et de la courbe C_3, on obtient I_3.
On mesure au compas 1 unité de longueur, on place sur la droite d'équation $y = 2$, le point A_3 ayant pour abscisse $x_I + 3$
puis le point B_3 de même abscisse que A_3 et d'ordonnée $2 + 3 = 5$. (T_3) est la droite $(I_3\,B_3)$



EXERCICE 2

1.

2. Si ABCD soit un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

donc $z_B - z_A = z_C - z_D$ donc $z_C = z_D + z_B - z_A$

$z_C = -2 + 2i + 2 + 2 + 2i$ donc $z_C = 2 + 4i$

3. *a.* $z_{A'} = \dfrac{z_A - (-2+2i)}{z_A - 2} = \dfrac{z_A + 2 - 2i}{z_A - 2} = \dfrac{-2-2i+2-2i}{-2-2i-2}$

$z_{A'} = \dfrac{-4i}{-4-2i} = \dfrac{-4i(-4+2i)}{(-4-2i)(-4-2i)} = \dfrac{8-16i}{16+4} = \dfrac{8-16i}{20}$

$z_{A'} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{5}i$

b. M' appartient à l'axe des réels ⇔ $z' = k$ (k réel)

⇔ $\dfrac{z-(-2+2i)}{z-2} = k$ (k réel) et $z \neq 2$ ⇔ $z - (-2+2i) = k(z-2)$ et $z \neq 2$

⇔ $\overrightarrow{DM} = k\,\overrightarrow{BM}$ (k réel) et M ≠ B ⇔ $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires et M ≠ B

⇔ B, D, M alignés et M ≠ B

Δ est la droite (BD) privée de B.

c. $\overrightarrow{BD}$ a pour affixe $-2 + 2i - 2 = -4 + 2i$

$\overrightarrow{BE}$ a pour affixe $4 - i - 2 = 2 - i$ donc $\overrightarrow{BD} = -2\,\overrightarrow{BE}$, les points B, D et E sont alignés.

$z_{E'} = \dfrac{z_E - (-2+2i)}{z_E - 2} = \dfrac{4-i+2-2i}{4-i-2} = \dfrac{6-3i}{2-i} = \dfrac{3(2-i)}{(2-i)} = 3$

$z_{E'}$ est réel ce qui est cohérent avec les résultats du *b.* : E appartient à la droite (BE) donc $z_{E'}$ est réel.

Bonus

4. M est un point de Δ ⇔ $\dfrac{z-(-2+2i)}{z-2} = k$ (k réel) et $z \neq 2$

⇔ $\overline{\left(\dfrac{z-(-2+2i)}{z-2}\right)} = k$ (k réel) et $z \neq 2$ ⇔ $\dfrac{\bar{z}+2+2i}{\bar{z}-2} = k$ (k réel) et $\bar{z} \neq 2$

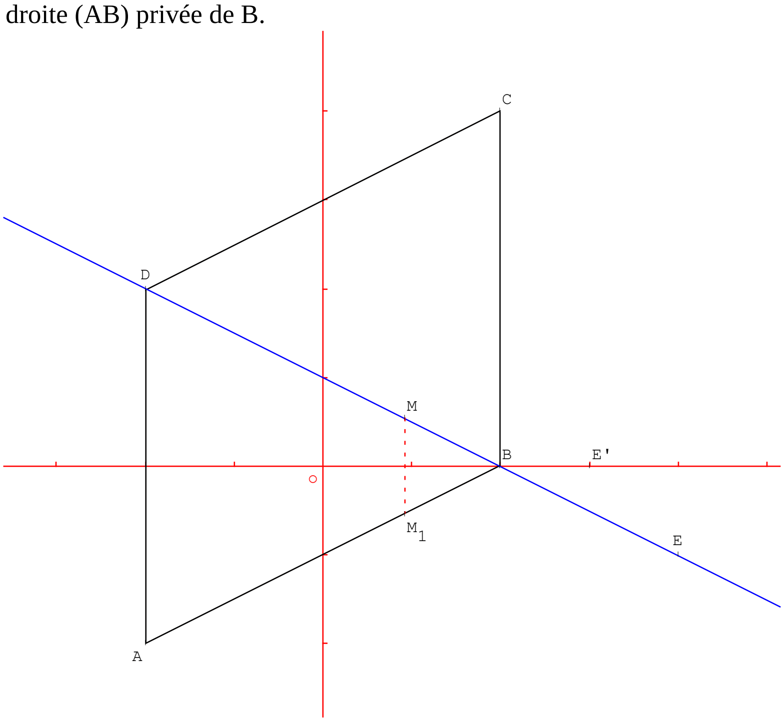
⇔ $\dfrac{\bar{z}-(-2-2i)}{\bar{z}-2} = k$ (k réel) et $\bar{z} \neq 2$

⇔ $\bar{z} - (-2-2i) = k(\bar{z} - 2)$ et $\bar{z} \neq 2$

⇔ $\overrightarrow{AM_1} = k\,\overrightarrow{BM_1}$ (k réel) et $M_1 \neq B$

⇔ $\overrightarrow{AM_1}$ et $\overrightarrow{BM_1}$ sont colinéaires et $M_1 \neq B$ ⇔ A, B, M_1 alignés et $M_1 \neq B$

⇔ M_1 symétrique du point M par rapport à l'axe des abscisses appartient à la droite (AB) privée de B.



Guesmi.B