Exercice 1

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par :

$$g(x) = e^{x} - x\,e^{x} + 1.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction g.

3. Donner le tableau de variations de g.

4. *a.* Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\ ;+\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

c. Démontrer que $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;+\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{e^{x}+1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.

2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\ ;+\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4}{e^{x}+1}.$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$. La figure est donnée en annexe.

Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de (C) de coordonnées $(x\ ;f(x))$,

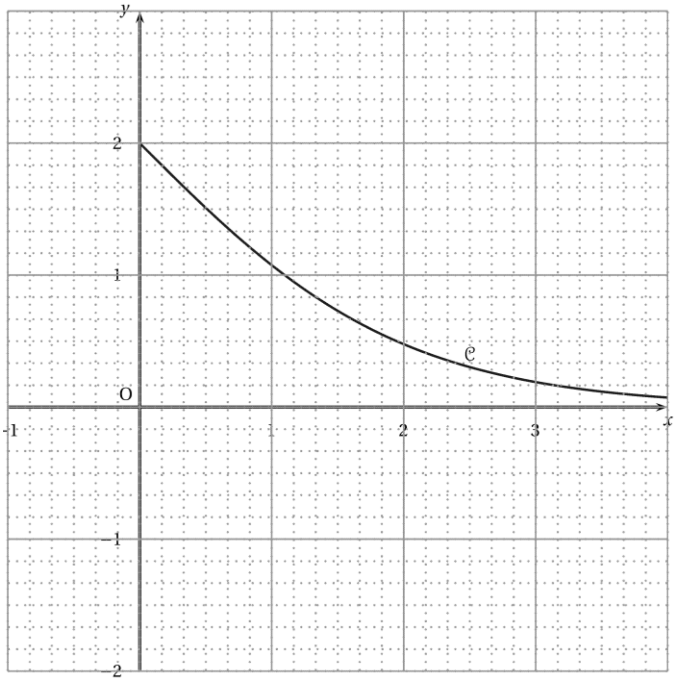
P le point de coordonnées $(x\ ;0)$,

Q le point de coordonnées $(0\ ;f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α. On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.

2. Le point M a pour abscisse α. La tangente (T) en M à la courbe (C) est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.



Exercice 2

On considère les deux courbes (C_1) et (C_2) d'équations respectives $y = e^{x}$ et $y = -x^{2} - 1$ dans un repère orthogonal du plan.

Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente (T) commune à ces deux courbes.

1. Sur le graphique représenté dans l'annexe 1, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle.

Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (C_1) et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (C_2).

2. On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe (C_1) et par B le point d'abscisse b de la courbe (C_2).

a. Déterminer une équation de la tangente (T_A) à la courbe (C_1) au point A.

b. Déterminer une équation de la tangente (T_B) à la courbe (C_2) au point B.

c. En déduire que les droites (T_A) et (T_B) sont confondues si et seulement si les réels a et b sont solutions du système (S) : $\begin{cases} e^{a} = -2b \\ e^{a} - a\,e^{a} = b^{2} - 1 \end{cases}$.

d. Montrer que le système (S) est équivalent au système (S') : $\begin{cases} e^{a} = -2b \\ e^{2a} + 4a\,e^{a} - 4e^{a} - 4 = 0 \end{cases}$.

3. Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation (E)

$$e^{2x} + 4x\,e^{x} - 4e^{x} - 4 = 0$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} + 4x\,e^{x} - 4e^{x} - 4$$

a. Montrer que pour tout x appartenant à $]-\infty\ ;0[$,

$$e^{2x} - 4 < 0 \text{ et } 4e^{x}(x-1) < 0$$

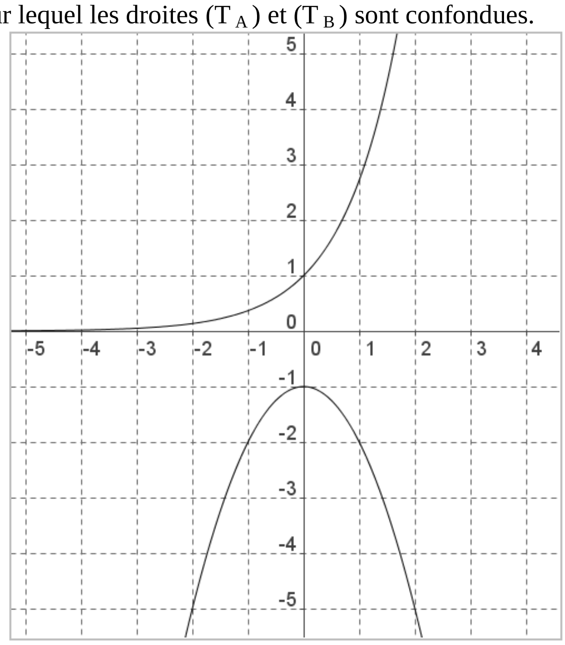
b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\ ;0[$.

c. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

d. Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique, dans l'intervalle $[0\ ;+\infty[$. On note α cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

4. On prend pour A le point d'abscisse α.

Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites (T_A) et (T_B) sont confondues.



Guesmi.B

CORRECTION

Partie 1

1. $g(x) = e^x(1 - x) + 1$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

2. $g(x) = e^x(1 - x) + 1$, soit $u(x) = e^x$ et $v(x) = 1 - x$ alors $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = -1$ donc :
$g'(x) = e^x(1 - x) - 1 \times e^x = e^x[1 - x - 1]$ soit $g'(x) = -x\,e^x$.

3. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $g'(x)$ *a* le même signe que $-x$.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
g	2	$\searrow$	$-\infty$

4. *a.* La fonction g est définie continue strictement décroissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$, $g([\,0\,;+\infty\,[) =]-\infty\,;2\,]$ et $0 \in]-\infty\,;2\,]$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[\,0\,;+\infty\,[$ une unique solution.

b. $g(1{,}27) \approx 0{,}038$ et $g(1{,}28) \approx -0{,}007$ donc $1{,}27 \leq \alpha \leq 1{,}28$

c. α est solution de $g(x) = 0$ donc $e^\alpha(1 - \alpha) + 1 = 0$ soit $e^\alpha(1 - \alpha) = -1$ donc $e^\alpha(\alpha - 1) = 1$, $\alpha \neq 1$ donc $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$

5. g est strictement décroissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et $g(\alpha) = 0$ donc si $0 \leq x < \alpha$ alors $g(x) > 0$, $g(\alpha) = 0$ et si $x > \alpha$ alors $g(x) < 0$.

Partie 2

1. $A'(x) = \dfrac{4(e^x + 1) - 4x\,e^x}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{4[e^x + 1 - x\,e^x]}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{4\,g(x)}{(e^x + 1)^2}$

$(e^x + 1)^2 > 0$ donc pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

2.

x	0		α		$+\infty$
$A'(x)$	0	$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$A(\alpha)$	$\searrow$	

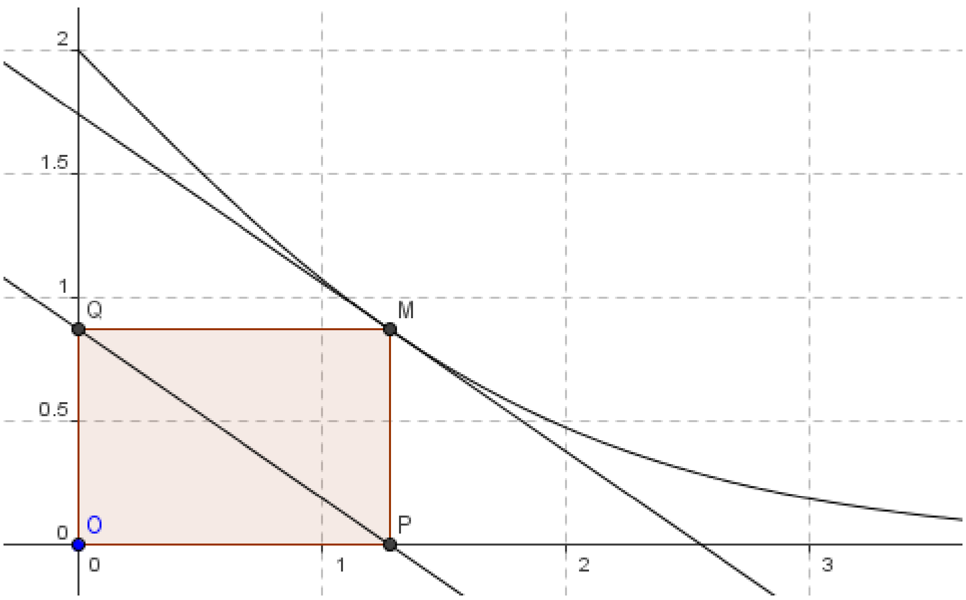
Partie 3

1. l'aire du rectangle O*PMQ* est égale à $x\,f(x) = A(x)$ donc l'aire du rectangle O*PMQ* est maximale lorsque M a pour abscisse α.

2. Le coefficient directeur de la droite (*PQ*) est $\dfrac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \dfrac{-f(\alpha)}{\alpha} = -\dfrac{1}{\alpha(e^\alpha + 1)}$

La tangente en M à la courbe (C) a pour coefficient directeur $f'(\alpha) = -\dfrac{e^\alpha}{(e^\alpha + 1)^2}$ or $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$ donc $e^\alpha + 1 = \dfrac{1}{\alpha - 1} + 1 = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$

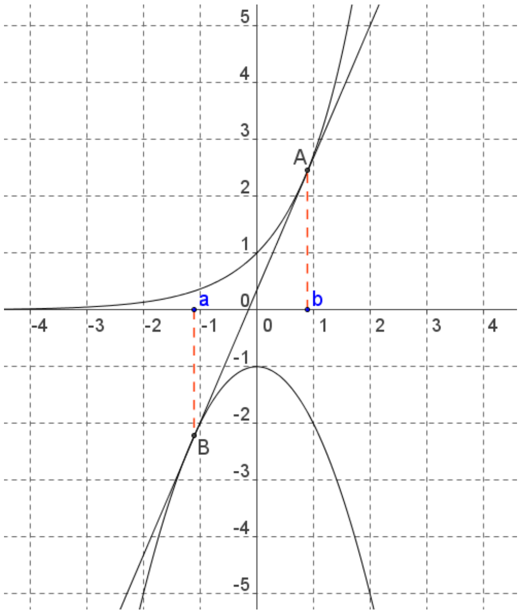
donc $\dfrac{e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \dfrac{1}{\alpha - 1} \times \dfrac{\alpha - 1}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$ donc $f'(\alpha) = -\dfrac{1}{\alpha(e^\alpha + 1)}$ donc la tangente en M et la droite (PQ) sont parallèles.



Guesmi.B

Exercice 2

1 .



l'abscisse du point de contact A de la tangente avec la courbe (C_1) est approximativement 0,9

l'abscisse du point de contact B de la tangente avec la courbe (C_2) est approximativement – 1,2.

2. *a*) La tangente à la courbe (C_1) au point A est la droite de coefficient directeur $f\,'(a) = e^a$ passant par A $(a\,;\,e^a)$ donc une équation de la tangente (T_A) à la courbe (C_1) au point A est $y = e^a(x - a) + e^a$

b) La tangente à la courbe (C_2) au point B est la droite de coefficient directeur $g'(b) = -2b$ passant par B $(b\,;\,-b^2-1)$

Une équation de la tangente (T_B) à la courbe (C_2) au point B est $y = -2bx + b^2 - 1$

c) Les droites (T_A) et (T_B) sont confondues si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux ($e^a = -2b$) et leurs ordonnées à l'origine sont égales ($-a\,e^a + e^a = b^2 - 1$) soit les réels a et b sont solutions du système (S) : $\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - a\,e^a = b^2 - 1 \end{cases}$.

d) $\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - a\,e^a = b^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = -e^a \\ 4e^a - 4a\,e^a = 4b^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ 4e^a - 4a\,e^a = 4(e^a)^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ 4e^a - 4a\,e^a = 4e^{2a} - 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4a\,e^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}$.

3. *a*) pour tout x appartenant à $]-\infty\,;\,0[$, $2x \le 0$ donc $e^{2x} \le e^0$ soit $e^{2x} \le 1$ donc $e^{2x} - 4 \le -3 < 0$

pour tout x appartenant à $]-\infty\,;\,0[$, $4 > 0$; $e^x > 0$ et $(x - 1) < 0$ donc $4e^x(x-1) < 0$

b) $e^{2x} + 4x\,e^x - 4e^x - 4 = e^{2x} - 4 + 4e^x(x-1)$

La somme de deux nombres strictement négatifs est un nombre strictement négatif donc pour tout x appartenant à $]-\infty\,;\,0[$, $f(x) < 0$

L'équation (E) n'*a* pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.

c) $f\,'(x) = 2e^{2x} + 4(e^x + x\,e^x) - 4e^x$ donc $f\,'(x) = 2e^{2x} + 4x\,e^x = 2(x+2)e^x$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, $x \ge 0$ donc $x + 2 > 0$ et $f\,'(x) > 0$

la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} - 4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 4e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f(0) = -7$

f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, (somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$) strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

$f([0\,;\,+\infty[) = [-7\,;\,+\infty[$

$0 \in [-7\,;\,+\infty[$ donc l'équation (E) $f(x) = 0$ admet une solution unique, dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

$f(0{,}84) \approx -0{,}117$ et $f(0{,}85) \approx 0{,}07$ donc $f(0{,}84) < 0$ et $f(0{,}85) > 0$ donc $0{,}84 \le \alpha \le 0{,}85$.

4. $b = -\frac{1}{2}e^a$ or $0{,}84 \le a \le 0{,}85$ donc $e^{0{,}84} \le e^{\alpha} \le e^{0{,}85}$ donc $-\frac{1}{2}e^{0{,}85} \le -\frac{1}{2}e^a \le -\frac{1}{2}e^{0{,}84}$

soit $-1{,}2 \le -\frac{1}{2}e^{0{,}85} \le b \le -\frac{1}{2}e^{0{,}84} \le -1{,}1$

Guesmi.B