EXERCICE 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-3\}$, dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-4		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	10	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$-\frac{7}{2}$	↗	$+\infty$

On sait, de plus, que pour tout réel $x \neq -3$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme : $a\,x^2 + b + \dfrac{c}{x+d}$ où a, b, c, d sont quatre réels (avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$) et que $f'(x) = 2\,a\,x - \dfrac{c}{(x+d)^2}$.

1\. *a*. À l'aide des indications fournies par le tableau, déterminer d.

Préciser $f(-4)$; $f(-1)$; $f'(-4)$ et $f'(-1)$. En déduire que a, b et c vérifient le système : $\begin{cases} 16\,a + b - c = 10 \\ -8\,a - c = 0 \\ 2\,a + 2\,b + c = -7 \end{cases}$.

Résoudre ce système et déterminer la fonction f.

1\. *b*. Démontrer qu'il existe un réel e tel que : pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$, $f'(x) = \dfrac{(x+1)^2\,(x+e)}{(x+3)^2}$

1\. *c*. Justifier toutes les informations du tableau de variation de f.

2\. Soit C la courbe représentative de f dans un repère du plan et P la parabole d'équation $y = \dfrac{x^2}{2} - 2$ dans le même repère.

2\. *a*. Prouver que P coupe l'axe des abscisses en deux points que l'on déterminera.

2\. *b*. Étudier la position relative des courbes C et P.

2\. *c*. Prouver que P est une courbe asymptote de C en $-\infty$ et en $+\infty$.

2\. *d* Construire P et C.

2\. *e* . Résoudre algébriquement l'inéquation : $-0{,}1 < f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - 2) < 0{,}1$.

On désigne par M et N les points de même abscisse x appartenant respectivement à (C) et (D).
On juge que M et N sont indiscernables sur le graphique lorsque la distance MN est inférieure à 0,1 unité de longueur.
Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles M et N sont indiscernables.

EXERCICE 2

1\. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x - x$
Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. Préciser $f(0)$, en déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

2\. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x + \dfrac{x^2}{2} - 1$

Déterminer le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$. Préciser $g(0)$, en déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

3\. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$

Déterminer le sens de variation de h sur $\mathbb{R}$. Préciser $h(0)$, en déduire le signe de $h(x)$

4\. *a*. A l'aide des questions précédentes, montrer que sur $[\,0\,;+\infty\,[$: $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

4\. *b*. En déduire un encadrement sur $]\,0\,;+\infty\,[$ de $\dfrac{\sin x}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{x}$.

5\. A l'aide des questions précédentes, déterminer un encadrement de $\sin x$ sur $]-\infty\,;0\,]$.

4\. *b*. En déduire un encadrement sur $]-\infty\,;0\,[$ de $\dfrac{\sin x}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin x}{x}$.

Guesmi.B

EXERCICE 1

1\. *a*. f est définie lorsque $x + d \neq 0$ soit $x \neq -d$ donc d'après le tableau de variation $-d = -3$ donc $d = 3$

$f(x) = a\,x^2 + b + \dfrac{c}{x+3}$ et $f\,'(x) = 2\,a\,x - \dfrac{c}{(x+3)^2}$.

$f(-4) = 10$ donc $16\,a + b + \dfrac{c}{-4+3} = 10$ soit $16\,a + b - c = 10$

$f(-1) = -\dfrac{7}{2}$ donc $a + b + \dfrac{c}{-1+3} = -\dfrac{7}{2}$ donc $a + b + \dfrac{c}{2} = -\dfrac{7}{2}$ donc $2\,a + 2\,b + c = -7$

$f\,'(-4) = 0$ donc $-8\,a - \dfrac{c}{(-4+3)^2} = 0$ soit $-8\,a - c = 0$

$f\,'(-1) = 0$ donc $-2\,a - \dfrac{c}{(-1+3)^2} = 0$ soit $-2\,a - \dfrac{c}{4} = 0$ donc $-8\,a - c = 0$ donc a, b et c vérifient le système : $\begin{cases} 16\,a + b - c = 10 \\ -8\,a - c = 0 \\ 2\,a + 2\,b + c = -7 \end{cases}$

$c = -8\,a$ donc le système devient : $\begin{cases} c = -8\,a \\ 16\,a + b + 8\,a = 10 \\ 2\,a + 2\,b - 8\,a = -7 \end{cases}$ soit $\begin{cases} c = -8\,a \\ 24\,a + b = 10 \\ -6\,a + 2\,b = -7 \end{cases}$ donc en multipliant la dernière ligne par 4 :

$\begin{cases} c = -8\,a \\ 24\,a + b = 10 \\ -24\,a + 8\,b = -28 \end{cases}$ en ajoutant les deux dernières lignes : $\begin{cases} c = -8\,a \\ 24\,a + b = 10 \\ 9\,b = -18 \end{cases}$ soit $\begin{cases} c = -8\,a \\ 24\,a + b = 10 \\ b = -2 \end{cases}$ donc en remplaçant :

$\begin{cases} c = -8\,a \\ 24\,a - 2 = 10 \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -8\,a \\ 24\,a = 12 \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -8\,a \\ a = \dfrac{1}{2} \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = -4 \end{cases}$ donc $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2 - \dfrac{4}{x+3}$

$f\,'(x) = x + \dfrac{4}{(x+3)^2}$

1\. *b*. $f\,'(x) = x + \dfrac{4}{(x+3)^2} = \dfrac{x^3 + 6\,x^2 + 9\,x + 4}{(x+3)^2}$

$x^3 + 6\,x^2 + 9\,x + 4 = (x^2 + 2\,x + 1)\,(x + e)$ donc $x^3 + 6\,x^2 + 9\,x + 4 = x^3 + (e + 2)\,x^2 + (2\,e + 1)\,x + e$
donc $e + 2 = 6$, $2\,e + 1 = 9$ et $e = 4$ donc $x^3 + 6\,x^2 + 9\,x + 4 = (x^2 + 2\,x + 1)\,(x + 4)$

$f\,'(x) = \dfrac{(x+1)^2\,(x+4)}{(x+3)^2}$

1\. *c*. Un carré est toujours positif ou nul donc $f\,'(x)$ a le même signe que $x + 4$, et s'annule pour $x = -1$ d'où le sens de variation de f

x	$-\infty$		-4		-3		-1		$+\infty$
$f\,'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$+$	

Il suffit ensuite de déterminer les limites de f aux bornes du domaine de définition

$f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2 - \dfrac{4}{x+3}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2}x^2 - 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x+3} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{2}x^2 - 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x+3} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{2}x^2 - 2 = \dfrac{5}{2}$ et $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{4}{x+3} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{2}x^2 - 2 = \dfrac{5}{2}$ et $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{4}{x+3} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$

2\. *a* P coupe l'axe des abscisses quand $\dfrac{1}{2}x^2 - 2 = 0$ soit si $x^2 = 4$ donc si $x = 2$ ou $x = -2$ donc P coupe l'axe des abscisses en deux points $A_1\,(-2\,;\,0)$ et $A_2\,(2\,;\,0)$.

2\. *b* f est décroissante sur $]-\infty\,;\,-4]$ et croissante sur $[4\,;\,-3[$ donc f admet un minimum en -4; $f(-4) = 10$ donc pour tout x de $]-\infty\,;\,-3[$, $f(x) \geq 10$ donc C ne coupe pas l'axe des abscisses sur $]-\infty\,;\,-3[$.

f est définie dérivable, strictement croissante sur $]-3\,;+\infty[$, $f(]-3\,;+\infty[) =]-\infty\,;+\infty[$, donc $0 \in f(]-3\,;+\infty[)$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]-3\,;+\infty[$.
La courbe C coupe donc l'axe des abscisses en un seul point sur $]-3\,;+\infty[$.
$f(2{,}34) < 0$ et $f(2{,}35) > 0$ et l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]-3\,;+\infty[$ donc f s'annule sur $]2{,}34\,;2{,}35[$ donc $2{,}34 < \alpha < 2{,}35$

2\. *c.* $f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - 2) = -\dfrac{4}{x+3}$

donc si $x > -3$, $f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - 2) < 0$ donc C est en dessous de P sur $]-3\,;+\infty[$

si $x < -3$, $f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - 2) > 0$ donc C est au dessus de P sur $]-\infty\,;-3[$.

$f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - 2) = -\dfrac{4}{x+3}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x+3} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - 2) = 0$ donc P est asymptote à C en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{x+3} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - 2) = 0$ donc P est asymptote à C en $-\infty$.

2\. *d.* Pour tracer les courbes C et P, il faut placer les éléments remarquables :
Pour la parabole P
sommet de coordonnées $(0\,;-2)$ et la tangente horizontales au point d'abscisse 0
Ces éléments étant placés, il faut placer des points de P :

x	-6	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	6	2,5	0	$-1{,}5$	-2	$-1{,}5$	0	2,5	6

On peut alors tracer P

Pour la courbe C
Points à tangentes horizontales pour C aux points d'abscisse -4 et -1
l'asymptote $x = -3$.
Ces éléments étant placés, il faut placer des points de C :

x	-7	-5	-4	$-3{,}5$	$-2{,}5$	-2	-1	1	2	5
y	23,5	12,5	10	12,125	$-6{,}875$	-4	$-3{,}5$	$-2{,}5$	$-0{,}8$	10

On peut alors tracer C.

2\. *e* . $f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - 2) = -\dfrac{4}{x+3}$.

Il suffit donc de résoudre $-0{,}1 < \dfrac{4}{x+3} < 0{,}1$. On ne peut travailler qu'avec des nombres de même signe donc deux cas :

<u>Cas 1 :</u> $0 \le \dfrac{4}{x+3} < 0{,}1$ donc en passant aux inverses : $\dfrac{x+3}{4} > 10$ soit $x + 3 > 40$ donc $x > 37$

<u>Cas 2 :</u> $-0{,}1 < \dfrac{4}{x+3} < 0$ donc en passant aux inverses : $-10 > \dfrac{x+3}{4}$ soit $x + 3 < -40$ donc $x < -43$

Si $x \in]-\infty\,;-43[\cup]37\,;+\infty[$, l'écart entre la courbe et la parabole est inférieur à 0,1.

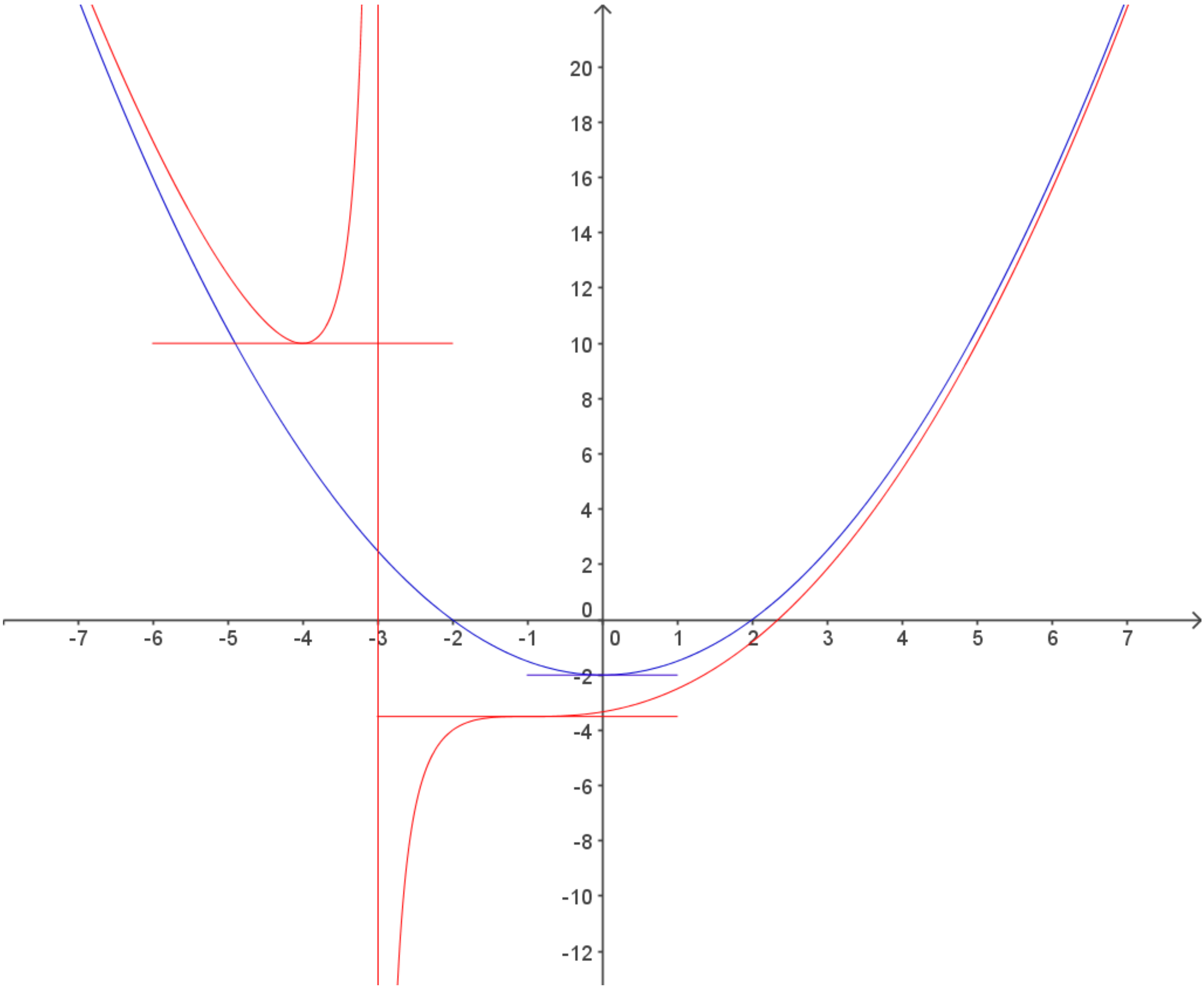
<u>Si $x < -3$</u>, C est au dessus de P sur $]-\infty\,;-3[$ donc $MN = f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - 2) = -\dfrac{4}{x+3}$.

$MN < 0{,}1 \Leftrightarrow 0 < -\dfrac{4}{x+3} < 0{,}1 \Leftrightarrow -0{,}1 < \dfrac{4}{x+3} < 0$ donc x > – 43 d'après le calcul précédent

<u>Si $x > -3$</u>, C est en dessous de P sur $]-3\,;+\infty[$ donc $MN = (\frac{1}{2}x^2 - 2) - f(x) = \dfrac{4}{x+3}$.

$MN < 0{,}1 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{4}{x+3} < 0{,}1$ donc x > 37 d'après le calcul précédent

L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles M et N sont indiscernables est donc $]-\infty\,;-43[\cup]37\,;+\infty[$,



Guesmi.B

EXERCICE 2

1. $f\ '(x) = \cos x - 1$ or $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $f\ '(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\searrow$	
$f\ (x)$		$+$	0	$-$	

$f\ (0) = 0$ donc si $x < 0$ alors $f\ (x) \geq 0$ et si $x > 0$ alors $f\ (x) \leq 0$

2. $g'(x) = -\sin x + x = -f\ (x)$ donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$g(x)$		$+$	0	$+$	

3. $h'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} = g(x)$ donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$+$	
h		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	

4. *a*. sur $[\ 0\ ;+\infty\ [$: $f\ (x) \leq 0$ donc $\sin x \leq x$ et $h(x) \geq 0$ donc $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x$ donc sur $[\ 0\ ;+\infty\ [$: $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

4. *b*. sur $]\ 0\ ;+\infty\ [$: $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ soit $x\left(1 - \dfrac{x^2}{6}\right) \leq \sin x \leq x$

$x > 0$ donc $1 - \dfrac{x^2}{6} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} 1 - \dfrac{x^2}{6} = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$ et pour tout $x > 0$: $1 - \dfrac{x^2}{6} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

5. sur $]-\infty\ ;0\ ]$: $f\ (x) \geq 0$ donc $\sin x \geq x$ et $h(x) \leq 0$ donc $\sin x \leq x - \dfrac{x^3}{6}$ donc sur $]-\infty\ ;0\ ]$: $x \leq \sin x \leq x - \dfrac{x^3}{6}$

4. *b*. sur $]-\infty\ ;0\ ]$: $x \leq \sin x \leq x\left(1 - \dfrac{x^2}{6}\right)$ donc si $x < 0$: $1 \geq \dfrac{\sin x}{x} \geq 1 - \dfrac{x^2}{6}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} 1 - \dfrac{x^2}{6} = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 = 1$ et pour tout $x > 0$: $1 - \dfrac{x^2}{6} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Dans tous les cas $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$