6

Nombre dérivé. Fonction dérivée

Un ballotin

Chaque ballotin a une base rectangulaire de largeur 6 cm et de longueur x cm . La boite est fermée par quatre rabats formant trois rectangles isométriques.

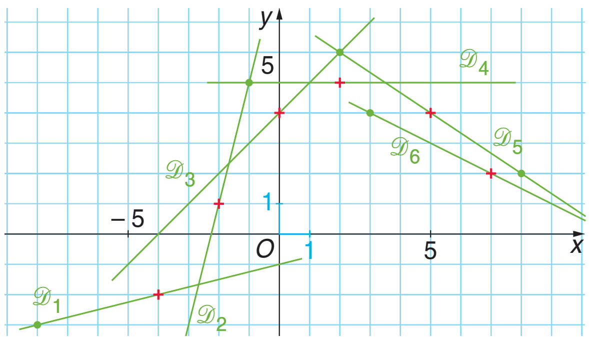
Quelle longueur x choisir pour confectionner un ballotin de 1 200 cm³ en utilisant le minimum de carton ?

[voir exercice 103]

Tests préliminaires

A. Coefficient directeur

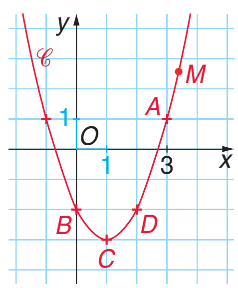
Pour chaque droite, lire le coefficient directeur.



[Voir techniques de base, p. XVII]

B. Équation d'une sécante

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2 - 2x - 2$,
et représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-contre.



a) Déterminer l'équation réduite de chacune des sécantes à cette courbe :
(AB) , (AC) et (AD) .

b) Soit M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $3 + h$, avec $h \in [-1 ; 1]$.
Déterminer le coefficient directeur m de (AM) .

c) Si $h = 0{,}0001$, donner une valeur approchée de m à 0,01 près.
Donner l'équation réduite de la droite (AM) .

C. Calcul algébrique

1° Soit $f(x) = x^2 - 3x + 4$ et h non nul.

a) Développer $f(1 + h)$ et calculer $f(1)$.

b) Montrer que $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = h - 1$.

2° Soit $f(x) = x^3 - x^2$ et h non nul.

a) Développer $f(2 + h)$ et calculer $f(2)$.

b) Montrer que $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = h^2 + 5h + 8$.

3° Soit $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$ et h non nul.

a) Déterminer $f(h - 1)$ et calculer $f(-1)$.

b) Montrer que $\dfrac{f(h-1) - f(-1)}{h} = \dfrac{-3}{h+1}$.

D. Sens de variation

Pour chaque fonction f , indiquer si elle est croissante sur I , décroissante sur I ou si on ne peut pas conclure.

a) $f(x) = x^2 - 4 - \dfrac{1}{x}$ sur $I =]0 ; +\infty[$;

b) $f(x) = -\dfrac{x}{2} + 1 + \dfrac{2}{x}$ sur $I =]0 ; +\infty[$;

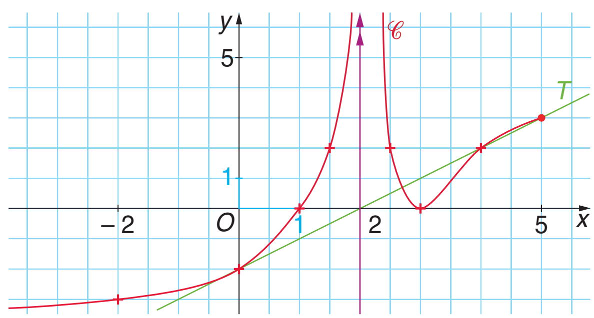
c) $f(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{x-3}$ sur $I =]3 ; +\infty[$;

d) $f(x) = -(x-3)^2 + 2$ sur $I = [3 ; +\infty[$.

[Voir chapitre 2, p. 40]

E. Lectures graphiques

On considère la fonction f définie sur :
$]-\infty ; 2[\cup]2 ; 5]$
et représentée par la courbe ci-dessous.



a) Dresser son tableau des variations.

b) Lire $f(4)$; $f(1)$ et $f(0)$.

c) Lire le coefficient directeur de la droite T et donner son équation réduite.

[Voir techniques de base, p. XII]

F. Signe d'une expression

1° Compléter le tableau de signes de la fonction f représentée ci-dessus :

x	$-\infty$	2	5
signe de $f(x)$		‖	

2° Sans utiliser le discriminant, donner le signe de chaque expression. (On pourra indiquer l'allure de la parabole.)

$A(x) = -x^2 + 4$; $B(x) = (x-4)^2$;

$C(x) = x^2 - 4x$; $D(x) = x^2 + 4$.

Guesmi.B

Activités préparatoires

1. Sécantes à une courbe passant par un point

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4$ et $\mathscr{P}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

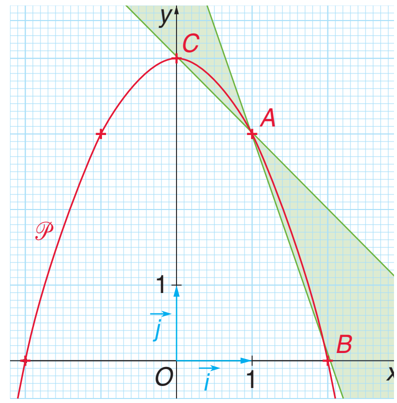
On se propose d'étudier le coefficient directeur des sécantes à $\mathscr{P}$ au point $A(1 ; 3)$.

1° Calculer les coefficients directeurs des droites (AC) et (AB) du graphique.

2° On considère le point M de la parabole $\mathscr{P}$ ayant pour abscisse $1 + h$, h est un petit nombre non nul.

a) Montrer que le coefficient directeur de la sécante (AM) est $m = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$.

b) Que devient m lorsque **h tend vers 0**, c'est-à-dire lorsqu'il devient pratiquement nul ?



Remarque : une autre approche est vue à l'aide d'un logiciel, page 151.

2. Coût marginal

Un atelier fabrique des objets. Le coût total de fabrication de q objets est donné en ligne 3 d'un tableur.

1° Quel est le sens de variation du coût total ? Lire les coûts fixes.

2° Lorsque l'on a fabriqué 6 objets, le 6^e objet coûte :

$$C(6) - C(5).$$

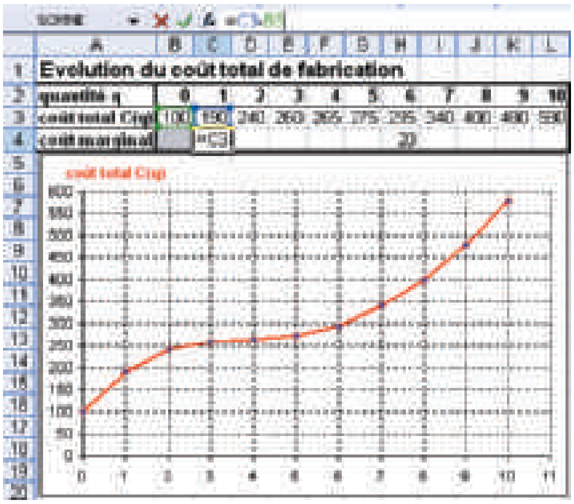
Ce coût est **le coût marginal du 6^e objet.**

a) Comment lire le coût marginal du 6^e objet sur le graphique ? Faire le lien avec les segments.

b) Calculer le coût marginal de chaque objet de 1 à 10.

Quel est le signe du coût marginal ? Faire le lien avec le sens de variation du coût total.

Représenter ce coût marginal dans un repère orthogonal.



3. Approximation affine de $(1 + x)^3$ pour x proche de 0

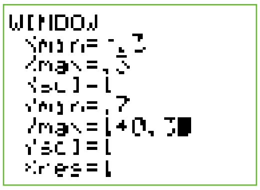
1° Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1 + x)^3$$

et g la fonction affine telle que $g(x) = 1 + 3x$.

a) Vérifier que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ passent par $A(0 ; 1)$.

b) Visualiser les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ au voisinage de A dans la fenêtre.



Comment semblent être ces deux courbes ?

c) Effectuer des ZOOM OUT sur le point A. Sur $[0 ; 1]$, quelle est la position de la courbe $\mathscr{C}_g$ par rapport à $\mathscr{C}_f$?

2° Une population de 10 000 personnes augmente durant 3 ans de 2 % par an.

a) Calculer la population au bout de 3 ans.

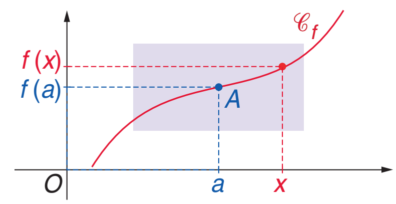
b) Si on avait appliqué un coefficient multiplicateur de $1 + 3 \times \dfrac{2}{100}$, quelle serait l'erreur commise ?

Guesmi.B

1. Limite en 0. Accroissement moyen

Toutes les fonctions vues en 1[e] ES sont telles que, en toute valeur a de leur ensemble de définition, pour tout réel x proche de a, $f(x)$ est proche de $f(a)$.

Autrement dit, si x est dans un voisinage de a, $f(x)$ sera aussi dans un voisinage de $f(a)$.



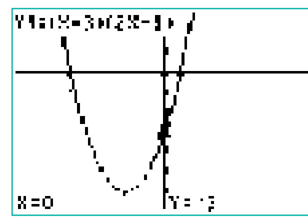
Limite en 0

Si f est une fonction définie sur un intervalle I contenant 0, on admet que chercher la limite de f en 0 revient à calculer l'image de 0 par f :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

Exemple : Soit $f(x) = (x+3)(2x-1)$, fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$; $f(0)$ existe, donc si $x \to 0$, alors $f(x) \to f(0) = (0+3)(2 \times 0 - 1) = -3$.

Ainsi $\lim_{x \to 0} (x+3)(2x-1) = -3$.



Accroissement moyen (*)

définition : a et b étant deux réels distincts de l'intervalle I, l'**accroissement moyen** de la fonction f entre a et b est le quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

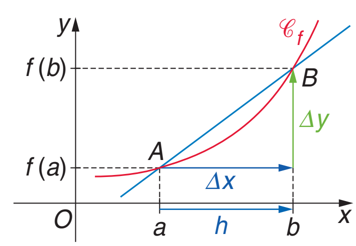
Interprétation graphique

Le quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le coefficient directeur de la sécante (AB) à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f.

On notera $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\text{accroissement des ordonnées}}{\text{accroissement des abscisses}}$.

En posant $b = a+h$, avec h un réel non nul, l'accroissement moyen de f entre a et $a+h$ s'écrit :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$



Exemple : Soit la fonction carré f définie sur $\mathbb{R}$. *Pour* $a = 2$, l'accroissement moyen entre 2 et $2+h$ est :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2} = \frac{(2+h)^2-2^2}{h} = \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \frac{4h+h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} = 4+h.$$

Lorsque $2+h$ est proche de 2, h devient tout petit (pratiquement nul) et $4+h$ est presque 4.

Ainsi $\lim_{h \to 0} (4+h) = 4$.

Cas particulier : coût marginal d'une unité produite

Soit $C(q)$ le coût total lorsque l'on a fabriqué q unités.

Le coût marginal de la q-ième unité produite est l'accroissement de coût dû à cette dernière unité produite, c'est-à-dire $C_m(q) = C(q) - C(q-1)$.

(*) On parle aussi de taux de variation de la fonction f entre a et b.

Guesmi.B

Calculer un accroissement moyen

Méthode

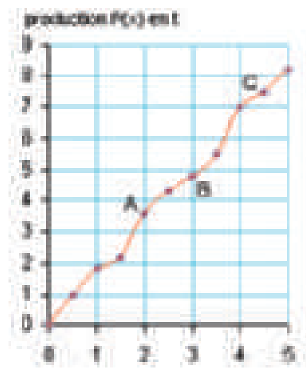
Calculer un accroissement moyen entre a et b revient à considérer une **fonction affine** P, et à chercher son coefficient directeur :

$$\frac{P(b)-P(a)}{b-a}.$$

Deux accroissements moyens égaux correspondent à deux segments parallèles sur le graphique.

La production d'une machine en fonction de la durée d'utilisation est représentée ci-dessous. :

temps, en h	**0**	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**	**2,5**	**3**	**3,5**	**4**	**4,5**	**5**
production $P(x)$, en t	0	1	1,8	2,2	3,6	4,3	4,8	5,5	7	7,5	8,2



Montrer que les accroissements moyens entre 0 et 2 h et entre 3 h et 4,5 h sont égaux.

• **Entre 0 h et 2 h :**

$$\frac{P(2)-P(0)}{2-0} = \frac{3{,}6}{2} = 1{,}8 \;;$$

soit 1,8 t par heure.

• **Entre 3 h et 4,5 h :**

$$\frac{P(4{,}5)-P(3)}{4{,}5-3} = \frac{7{,}5-4{,}8}{1{,}5} = 1{,}8 \;.$$

Calculer le coût marginal du q- ième objet

Méthode

Soit $C(q)$ le coût total pour q objets fabriqués.

Le **coût marginal** du q-ième objet est :

$$C_m(q) = C(q)-C(q-1) \;.$$

On définit, de même, le bénéfice marginal, la recette marginale, …

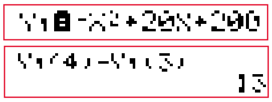
La fonction de coût total pour la fabrication de q chaises est donnée, en €, par $C(q) = -q^2+20q+200$, pour $q \in [0\,;10]$.

Calculer le coût marginal de la 4^e chaise fabriquée.

Exprimer le coût marginal de la q-ième *chaise en fonction de* q.

• Coût marginal de la 4^e chaise :

$C_m(4) = C(4)-C(3) = 264-251 = \mathbf{13}$.



• Coût marginal de la q-ième chaise, pour $q \in [1\,;10]$:

$$C_m(q) = C(q)-C(q-1)$$

$$= -q^2+20q+200-(-(q-1)^2+20(q-1)+200) = \mathbf{-2q+21} \;.$$

Déterminer une limite en 0

Méthode

Pour déterminer la limite en 0 d'une fonction f :

• Si $f(0)$ existe, alors on calcule $f(0)$; et :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \;;$$

• Si 0 est valeur interdite, on cherche à simplifier.

Les autres cas sont traités au chap. 9, p. 228 .

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$.

a) Déterminer la limite de f en 0.

b) Exprimer $Q(h) = \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ en fonction de h non nul.

Déterminer la limite de ce quotient quand h tend vers 0.

a) Comme $f(0)$ existe, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-2}{x+1} = \frac{0-2}{0+1} = -2$.

b) $f(2+h) = \dfrac{2+h-2}{2+h+1} = \dfrac{h}{h+3}$ et $f(2) = \dfrac{2-2}{2+1} = 0$.

D'où $Q(h) = \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \left(\dfrac{h}{h+3}-0\right)\times\dfrac{1}{h} = \dfrac{\cancel{h}}{h+3}\times\dfrac{1}{\cancel{h}} = \dfrac{1}{h+3}$.

Le quotient $Q(h)$ n'existe pas quand $h=0$, mais, après simplification par h, on obtient :

$$\lim_{h\to 0} Q(h) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h+3} = \mathbf{\frac{1}{3}} \;.$$

Guesmi.B

2. Nombre dérivé en a et tangente en A

Nombre dérivé en a

définition : Si le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers **un nombre** lorsque h tend vers 0, alors la fonction f est **dérivable en a**.

La limite de ce quotient est le **nombre dérivé** de f en a. On le note $f'(a)$.

Autrement dit $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$.

Remarque : Si la limite en 0 est infinie, ce n'est pas un nombre, donc la fonction ne sera pas dérivable en a.

Cas particulier : **coût marginal instantané**

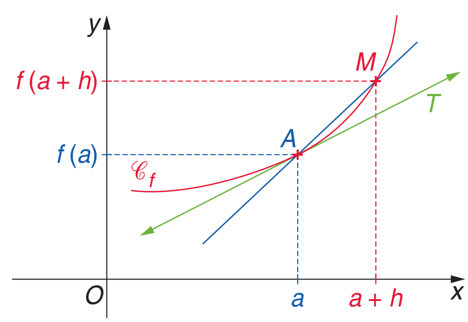
Soit $C(q)$ le coût total pour des grandes quantités d'objets, ou des quantités divisibles (en t, en kg, en L ...).

On admet que le **coût marginal instantané** au niveau q est assimilable au nombre dérivé du coût total en q $\boldsymbol{C_m(q) = C'(q)}$.

Interprétation graphique

Soit f une fonction dérivable en a et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative ; A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a et M un point mobile de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $a+h$, avec h proche de 0.

	Si le réel h	tend vers	0
alors	l'abscisse de M	tend vers	l'abscisse de A
et	le point M	se rapproche	du point A
le quotient	$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$	tend vers	**le nombre $f'(a)$**
donc	la **sécante (AM)**	se rapproche	**de la droite T**



Tangente en A

définition : La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite passant par A dont le coefficient directeur est le nombre dérivé de f en a.

Son équation réduite est $y = \underbrace{f'(a)}_{\text{coefficient directeur}}(x-a)+f(a)$.

coefficient directeur — **coordonnées de A** : $(a\,;\,f(a))$

Remarques : La tangente à une courbe en A touche la courbe en A.

Si on fait un « zoom » autour du point A, la tangente semble confondue avec la courbe.

Si $f'(a) = 0$, alors la tangente en A est horizontale.

Approximation affine

théorème admis : La tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_f$ est la représentation d'une fonction affine g. On admet que la fonction g est la **meilleure approximation affine** de f en a.

Autrement dit, pour un réel x proche de a, l'image $f(x)$ est proche de $g(x)$:

$$f(x) \approx f'(a)\,(x-a)+f(a).$$

APPLICATIONS

Calculer un nombre dérivé par la définition

Méthode

Pour calculer le nombre dérivé de f en a :

– on calcule $f(a+h)$ et $f(a)$;
– on divise $f(a+h)-f(a)$ par h ;
– on **simplifie par h** ;
– on cherche la limite de l'expression quand **h tend vers 0**
(en général, on remplace h par 0).

Soit $f(x) = \dfrac{4x}{x-1}$ définie sur $]1\,;+\infty[$. Calculer $f'(3)$.

$f(3+h) = \dfrac{4(3+h)}{(3+h)-1} = \dfrac{12+4h}{2+h}$ et $f(3) = \dfrac{4\times 3}{3-1} = 6$.

$f(3+h)-f(3) = \dfrac{12+4h}{2+h} - 6 = \dfrac{12+4h-12-6h}{2+h} = \dfrac{-2h}{2+h}$.

D'où $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \dfrac{-2\cancel{h}}{2+h}\times\dfrac{1}{\cancel{h}} = \dfrac{-2}{2+h}$.

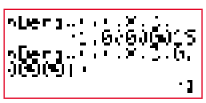
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2}{2+h} = \dfrac{-2}{2+0} = -1$. D'où $\boldsymbol{f'(3) = -1}$.

Utiliser la calculatrice pour obtenir un nombre dérivé

• Avec T.I. 82 Stats ou 83 ou 84

En (Y=)

Revenir à l'écran de calcul par (QUIT)



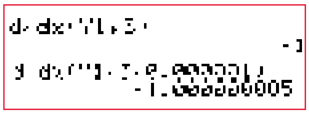
nDeriv(par (MATH) **8:nDeriv(** (ENTER)
Y1 par (VARS) **Y-VARS** **1:Function** **1:Y1** .

⚠ La calculatrice donne souvent une valeur approchée, qu'il est nécessaire d'arrondir.

• Avec Casio 35+ ou 65

En (MENU) 

Revenir à l'écran de calcul par (MENU) 



d/dx par (OPTN) (CALC) (d/dx)

Y1 par (VARS) (GRPH) (Y) , puis (1) .

Déterminer l'équation réduite d'une tangente

Méthode

La tangente à une courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite de coefficient directeur $f'(a)$, **nombre dérivé** de f en a, et passant par $A(a\,;f(a))$.

Donc, pour obtenir l'équation réduite de la tangente :

on calcule $f'(a)$, puis $f(a)$ et on écrit :

$$y = f'(a)(x-a)+f(a).$$

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$ est représentée par la courbe $\mathscr{C}$.
Déterminer les équations réduites des tangentes T et $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$, respectivement en A et B.

a) Comme $f'(3) = -1$ et $f(3) = 6$, alors la tangente T a pour équation :

$y = f'(3)(x-3)+f(3)$

$\Leftrightarrow\ y = -1(x-3)+6$

$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{y = -x+9}$.

b) Par lecture graphique :

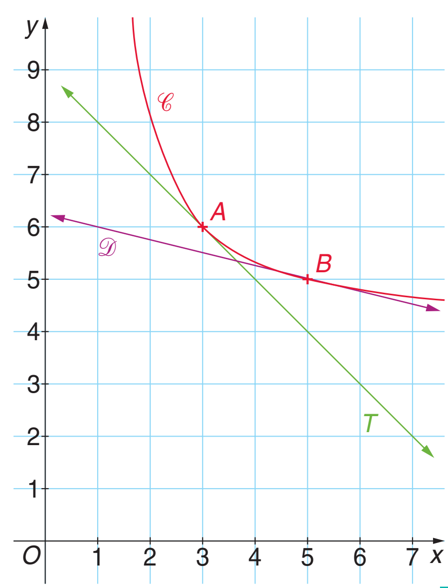
$f'(5) = -\dfrac{1}{4}$ et

$f(5) = 5$;

la tangente $\mathscr{D}$ a pour équation :

$y = -\dfrac{1}{4}(x-5)+5$

$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{y = -\dfrac{1}{4}x+\dfrac{25}{4}}$.



Guesmi.B

3. Fonction dérivée et sens de variation

Une fonction f est dérivable sur un intervalle I lorsque, pour tout réel x de l'intervalle, le nombre dérivé de f en x existe. Cela permet de définir une nouvelle fonction, **dérivée de f .**

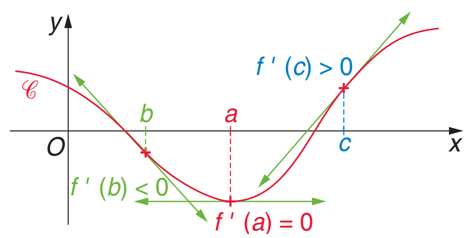
Fonction dérivée f'

La fonction f' qui, à tout réel x de l'intervalle I , associe $f'(x)$, nombre dérivé de f en x , est la **fonction dérivée** de f sur I .

Interprétation graphique

Dire que f est dérivable sur I signifie que, en tout réel x de I , la courbe $\mathscr{C}$, représentant la fonction f , admet une seule tangente, de coefficient directeur :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \ .$$



Conséquences

On considère un réel $h > 0$ et tel que $x + h \in I$.

Pour tout réel x de I , $x + h > x$:

- si f est croissante sur I , alors $f(x+h) \geqslant f(x)$; donc le quotient $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ est positif ; ainsi la dérivée sera positive. De même si $h < 0$, le quotient $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ reste positif.
- si f est décroissante sur I , alors $f(x+h) \leqslant f(x)$; donc le quotient est négatif ; ainsi la dérivée sera négative.

On admet la réciproque.

Théorème fondamental

théorème admis : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si la **dérivée** est **positive** sur I , *alors la* **fonction** f est **croissante** sur I .
- Si la **dérivée** est **négative** sur I , *alors la* **fonction** f est **décroissante** sur I .
- Si la dérivée est **nulle** en toute valeur de I , *alors la fonction* f est **constante** sur I .

Remarque : Par l'étude du signe de la dérivée, ce théorème donne le sens de variation d'une fonction.
Cependant, il faut garder en mémoire les cas particuliers : fonction polynôme du second degré et somme de fonctions de même sens de variation, vus aux chapitres 4 et 2.

Extremum

théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a ; b]$.

Si la dérivée s'annule **en changeant de signe**, la fonction admet un extremum sur $[a ; b]$.

x	a		c		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	minimum	$\nearrow$	

x	a		c		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	maximum	$\searrow$	

Reconnaître une fonction non dérivable

Méthode

f est dérivable sur un intervalle lorsque sa courbe $\mathscr{C}_f$ a une seule tangente, non verticale, en tous ses points.

- Si la courbe présente un saut en a, pour x proche de a, on n'a pas $f(x)$ proche de $f(a)$.
- Si la courbe présente une cassure en A d'abscisse a : il a deux tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ en A.
- Si la tangente en A est verticale, elle n'a pas de coefficient directeur.

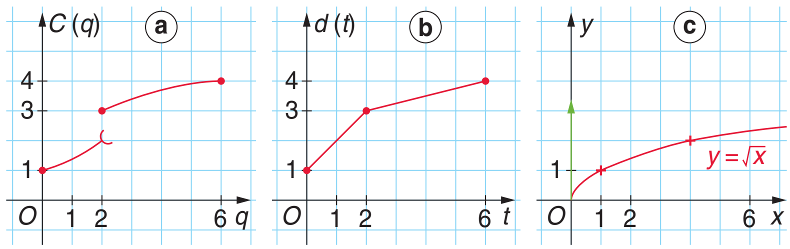
La courbe d'une fonction dérivable est « lissée » sans saut, ni cassure.

Expliquer en quoi ces trois fonctions ne sont pas dérivables sur $[0 ; 6]$:

ⓐ coût de production, en k€, en fonction de la quantité ;

ⓑ distance parcourue par un véhicule en fonction du temps ;

ⓒ fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$.



ⓐ En 2, il y a un investissement supplémentaire.

ⓑ En 2, le véhicule a changé brusquement de vitesse.

ⓒ En 0, la tangente est verticale, car :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty .$$

Reconnaître la courbe de la dérivée

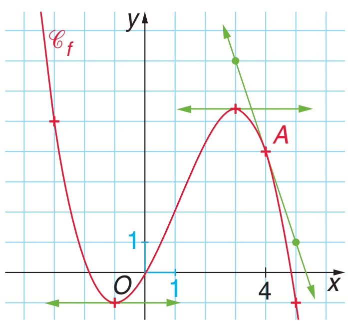
Méthode

Pour reconnaître la courbe de la dérivée, on vérifie que :

- pour tout intervalle où la fonction f est croissante, la dérivée f' est positive, c'est-à-dire que la courbe de la dérivée est au-dessus de l'axe des abscisses, et, sur tout intervalle où f est décroissante, la dérivée f' est négative ;
- si une tangente à $\mathscr{C}_f$ est tracée, on lit son coefficient directeur $f'(a)$, et $f'(a)$ est l'ordonnée sur la courbe de la dérivée au point d'abscisse a.

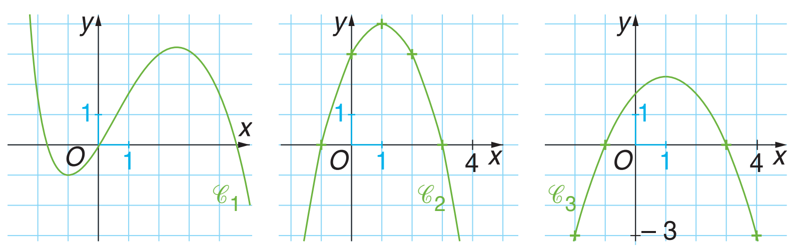
Si on sait que l'une des courbes est correcte, on justifie que les autres ne conviennent pas.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, connue par sa courbe $\mathscr{C}_f$ ci-contre.



L'une des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ ou $\mathscr{C}_3$ ci-dessous est celle de sa dérivée f'.

Laquelle ?



D'après le sens de variation de f, f est décroissante sur $]-\infty ; -1]$ et sur $[3 ; +\infty[$; donc la courbe de la dérivée doit être située en dessous ou sur l'axe des abscisses pour ces intervalles : ce n'est pas le cas de la courbe $\mathscr{C}_1$.

Sur $[-1 ; 3]$, la fonction f est croissante, donc la dérivée est positive : $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ peuvent convenir.

En A *d'abscisse 4*, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour coefficient directeur -3 ; donc $f'(4) = -3$.

Or $\mathscr{C}_3$ passe par le point $(4 ; -3)$; ce n'est pas le cas de $\mathscr{C}_2$.

Donc $\mathscr{C}_3$ est la courbe dérivée de la fonction f.

Guesmi.B

4. Calcul de dérivées

Dérivées usuelles

fonction f	fonction dérivée f'	validité
$f(x) = k$ $f(x) = x$ $f(x) = x^2$ $f(x) = x^n$	$f'(x) = 0$ $f'(x) = 1$ $f'(x) = 2x$ $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	k nombre réel ; $x \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$; n entier tel que $n \geqslant 2$
$f(x) = \frac{1}{x}$ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$x \in \left]0\,;+\infty\right[$ ou $x \in \left]-\infty\,;0\right[$ $x \in \left]0\,;+\infty\right[$ ou $x \in \left]-\infty\,;0\right[$ n entier non nul $x \in \left]0\,;+\infty\right[$ ou $x \in \left]-\infty\,;0\right[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in \left]0\,;+\infty\right[$

Exemple de démonstration :

Soit $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Pour tout réel x non nul, x et $x+h$ sont dans $\left]0\,;+\infty\right[$ ou dans $\left]-\infty\,;0\right[$:

$$f(x+h) = \frac{1}{x^2+2xh+h^2} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1}{x^2} \; ; \text{ d'où } \; f(x+h)-f(x) = \frac{x^2-x^2-2xh-h^2}{x^2(x^2+2xh+h^2)} = \frac{-2xh-h^2}{x^2(x^2+2xh+h^2)}.$$

Ainsi $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{\cancel{h}} \times \frac{\cancel{h}(-2x-h)}{x^4+2x^3h+x^2h^2}$.

Or $\lim\limits_{h \to 0} \frac{-2x-h}{x^4+2x^3h+x^2h^2} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$. D'où $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$.

Dérivée d'une somme

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

La dérivée d'une somme est la somme des dérivées : si $f = u + v$, alors $f' = u' + v'$.

Démonstration : Pour tout réel x de I et $h \neq 0$, avec $x + h \in I$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{u(x+h)+v(x+h)-u(x)-v(x)}{h} = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h}.$$

Or u et v sont dérivables en x : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} = u'(x)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h} = v'(x)$.

Ainsi $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = u'(x) + v'(x)$. Cela signifie que $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Dérivée du produit par un nombre

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel.

La dérivée de $k\,u$ est k fois la dérivée de u : si $f = k\,u$, alors $f' = k\,u'$.

Conséquence : Une fonction polynôme est dérivable sur son ensemble de définition.

Calculer la dérivée d'une somme

Méthode

Pour dériver une somme, on dérive chaque terme.

• Un nombre « **isolé** » a pour dérivée 0.

• Pour le produit par un nombre d'une fonction u, on « **garde** » le nombre et on dérive la fonction usuelle.

⚠ $\dfrac{u(x)}{k} = \dfrac{1}{k} \times u(x)$.

• La dérivée de x^n est nx^{n-1} : quand on dérive, on perd en puissance.

Soit $f(x) = x^4 - \dfrac{5x^2}{2} - 9x + 4$ et $g(x) = \dfrac{-x^3 + 3x + 1}{6}$ définies sur $\mathbb{R}$. Calculer leur dérivée.

• Pour $f(x) = x^4 - \dfrac{5x^2}{2} - 9x + 4$, dérivable sur $\mathbb{R}$:

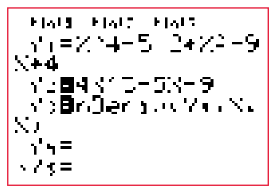
$$f'(x) = 4x^3 - \frac{5}{2} \times 2x - 9 = 4x^3 - 5x - 9 .$$

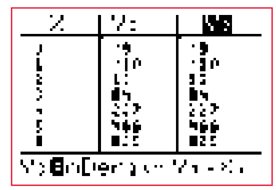
• Pour $g(x) = \dfrac{-x^3 + 3x + 1}{6}$, dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = \frac{-3x^2 + 3}{6} = \frac{-x^2 + 1}{2} .$$

Vérification à la calculatrice non formelle :

T.I. 82 Stats, 83 ou 84 (voir p. 143 et ex. 98, p. 165) :





Étudier les variations d'une fonction polynôme

Méthode

Pour étudier les variations d'une fonction polynôme à l'aide de la dérivée :

1. on précise l'ensemble de dérivabilité ;
2. on calcule la dérivée ;
3. on étudie le signe de la dérivée, souvent dans un tableau de signe sur $\mathbb{R}$;
4. on applique le théorème fondamental.

⚠ Si on demande d'étudier les variations, on conclut par des phrases.

Penser à dresser le tableau des variations sur l'ensemble de définition donné.

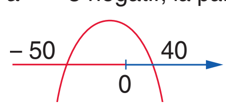
Soit $f(x) = -x^3 - 15x^2 + 6\,000x - 50\,000$ définie sur $[0 ; +\infty[$.

Étudier les variations de f . Préciser son maximum.

1. f est une fonction polynôme, dérivable sur son ensemble de définition $[0 ; +\infty[$.

2. Dérivée : $f'(x) = -3x^2 - 30x + 6\,000$, du 2e degré.

3. Signe de $-3x^2 - 30x + 6\,000$. $\Delta = b^2 - 4ac = 72\,900$.
Deux solutions $x_1 = 40$ et $x_2 = -50$.
$a = -3$ négatif, la parabole est tournée vers le bas.



x	$-\infty$		-50		0		40		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

4. Sur $[0 ; 40]$, la dérivée est positive, donc la fonction est croissante ; sur $[40 ; +\infty[$, la dérivée est négative, donc la fonction est décroissante.

Tableau des variations **sur $[0 ; +\infty[$** :

x	0		40		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

En 40, la dérivée s'annule en changeant de signe (positive, puis négative), donc la fonction admet un maximum :

$$f(40) = 102\,000 .$$

Remarque : si la fonction f représente un bénéfice en €, ce bénéfice est maximal pour une quantité $x = 40$; il vaut 102 000 €.

Dérivée d'un produit

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, de dérivées u' et v'.

La dérivée du produit $u\,v$ est la somme $u'v + v'u$;

(dérivée du 1^er facteur) × (2^e facteur) + (dérivée du 2^e facteur) × (1^er facteur) .

■ ***Cas particulier :*** Comme $u^2 = u \times u$, la dérivée de $\boldsymbol{u^2}$ est $u' \times u + u' \times u = \boldsymbol{2u'u}$.

■ ***Démonstration :*** Soit x un réel de I et $h \neq 0$ tel que $x + h \in I$.

$$\frac{u(x+h)\ v(x+h) - u(x)\ v(x)}{h} = \frac{u(x+h)\ v(x+h) - u(x)\ v(x+h)}{h} + \frac{v(x+h)\ u(x) - v(x)\ u(x)}{h}$$

$$= \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \times v(x+h) + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \times u(x) \ .$$

Or $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x)$; $\displaystyle\lim_{h \to 0} v(x+h) = v(x)$ et $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x)$.

D'où $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{u\ v(x+h) - u\ v(x)}{h} = u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x)$.

Dérivée de l'inverse d'une fonction, d'un quotient

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, de dérivées u' et v', et v ne s'annulant pas sur I.

La dérivée de l'inverse de v est $\dfrac{-v'}{(v)^2}$; la dérivée de $\dfrac{u}{v}$ est $\dfrac{u'v - v'u}{(v)^2}$.

Ces formules se démontrent comme les précédentes.

Pour mémoire, on emploie la formule du quotient $\dfrac{u}{v}$ lorsque la variable apparaît en haut et en bas du trait de fraction :

$$\frac{(\text{dérivée du haut}) \times (\text{le bas}) - (\text{dérivée du bas}) \times (\text{le haut})}{(\text{le bas})^2} \ .$$

Approximation de n hausses successives

théorème admis : Soit n un entier naturel et t un taux d'augmentation faible, de l'ordre de 1 %.

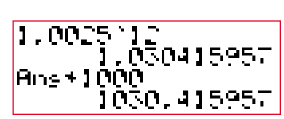
Une valeur subit n hausses successives de $t\,\%$, alors approximativement cette valeur a augmenté de $n\,t\,\%$.

■ ***Exemple :*** On place 1 000 € au taux mensuel de 0,25 %.

On peut dire que, au bout d'un an, ce capital a augmenté approximativement de 3 %, car $12 \times 0{,}25 = 3$.

D'après les théorèmes vus au chapitre 1, p. 16, en réalité le coefficient multiplicateur mensuel est 1,0025 ; donc le coefficient multiplicateur global sur un an est :

$$CM_{\text{global}} = 1{,}0025^{12} \approx 1{,}0304\ldots$$



Pour 1 000 €, l'écart n'est que de 0,42 €.

On démontre ce théorème pour $n = 2$ ou $n = 3$ (voir exercices 33 et 101).

APPLICATIONS

Calculer la dérivée de fonctions

Méthode

Reconnaître la forme donnée :

- un produit de deux facteurs contenant tout deux la variable :
$f = u\,v$, alors $f' = u'v + v'u$;

- un quotient où la variable n'apparaît qu'au dénominateur :
$f = \dfrac{k}{v}$, alors $f' = \dfrac{-k\,v'}{(v)^2}$;

- un quotient où la variable apparaît en haut et en bas du trait de fraction :
$f = \dfrac{u}{v}$ alors $f' = \dfrac{u'v - v'u}{(v)^2}$.

Soit $f(x) = (1-3x)(x^2-4)$ définie sur $\mathbb{R}$,
$g(x) = \dfrac{3}{x^2-4}$ et $h(x) = \dfrac{1-3x}{x^2-4}$ définies sur $]2\,;+\infty[$.
Calculer leur dérivée.

- $f(x) = (1-3x)(x^2-4)$ $\begin{cases} u(x) = 1-3x & \text{et} \quad v(x) = x^2-4 \\ u'(x) = -3 & \text{et} \quad v'(x) = 2x \end{cases}$.

Alors $f'(x) = (-3)(x^2-4) + (2x)(1-3x) = -3x^2+12+2x-6x^2$
$= -9x^2+2x+12$.

- $g(x) = \dfrac{3}{x^2-4}$. nombre en haut

pour $x \in\,]2\,;+\infty[$, $x^2-4 \neq 0$.
Alors $g'(x) = \dfrac{-3\times(2x)}{(x^2-4)^2} = \dfrac{-6x}{(x^2-4)^2}$.

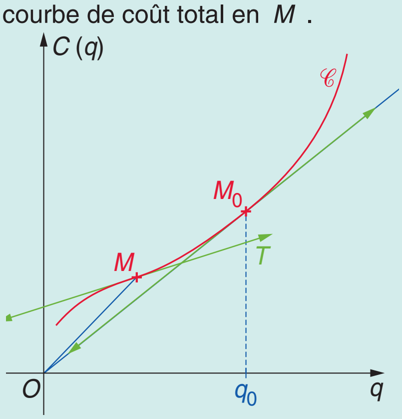
- $h(x) = \dfrac{1-3x}{x^2-4}$ x en haut et en bas

Alors $h'(x) = \dfrac{(-3)(x^2-4)-(2x)(1-3x)}{(x^2-4)^2} = \dfrac{3x^2-2x+12}{(x^2-4)^2}$.

Établir le lien entre coût moyen et coût marginal

Méthode

- Le **coût moyen** est le quotient du coût total par la quantité :
$$C_M(q) = \frac{C(q)}{q} .$$
Graphiquement, le coût moyen est la pente de la sécante (OM) , où M décrit la courbe de coût total.
- Le **coût marginal** est assimilé à la dérivée du coût total :
$$C_m(q) = C'(q) .$$
Graphiquement, le coût marginal est la pente de la tangente à la courbe de coût total en M .



Soit $C(q) = q^3+10q+250$, coût total de production, en k€, pour des quantités q , en tonnes, $q \in [0\,;9]$.
Déterminer le coût moyen et le coût marginal.
Dresser le tableau des variations du coût moyen et vérifier que lorsque le coût moyen est minimal, le coût moyen est égal au coût marginal.

Le coût moyen est défini sur $]0\,;9]$ par :
$$C_M(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{q^3+10q+250}{q} = q^2+10+\frac{250}{q} .$$
Le coût marginal est défini sur $[0\,;9]$ par :
$$C'(q) = 3q^2+10 .$$
La dérivée du coût moyen est :
$$C_M'(q) = 2q-\frac{250}{q^2} = \frac{2q^3-250}{q^2} = \frac{2\,(q^3-125)}{q^2} = \frac{2\,(q^3-5^3)}{q^2} .$$
Comme la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$, si $q \geqslant 5$, alors $q^3 \geqslant 5^3$. D'où le signe de la dérivée du coût moyen.

q	0		5		9
$C_M'(q)$	‖	−	0	+	
$C_M(q)$	‖	↘		↗	

Le coût moyen est minimal en $q_0 = 5$.

Or $C_M(5) = 5^2+10+\dfrac{250}{5} = 85$

et $C'(5) = 3\times5^2+10 = 85$.

Lorsque le coût moyen est minimal, il est égal au coût marginal : ici 85 k€ par t ou 85 € par kg.

FAIRE LE POINT

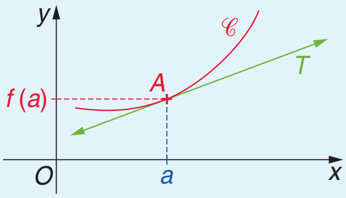
NOMBRE DÉRIVÉ DE f EN a ET TANGENTE

• $f'(a)$ est la **limite** du quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h **tend vers 0**.

Ce quotient est l'accroissement moyen de f entre a et $a+h$.

• Le nombre dérivé $f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a.

• La tangente est la représentation d'une fonction affine g : cette fonction est **la meilleure approximation affine** de la fonction f en a.



FONCTION DÉRIVÉE

La fonction qui, à tout réel x d'un intervalle, associe le nombre dérivé de f en x est la fonction dérivée f'.

On admet que toutes les fonctions polynômes et rationnelles sont dérivables sur tout intervalle où elles sont définies.

Savoir	Comment faire ?
calculer un nombre dérivé à partir de la définition	On exprime la différence $f(a+h)-f(a)$ en fonction de h, on la divise par h et on simplifie par h. Lorsque h tend vers 0, on obtient le nombre dérivé.
calculer la fonction dérivée f d'une fonction f	On regarde la forme de la fonction : • si c'est une somme : $f = u+v$, alors $f' = u'+v'$; • si c'est un produit : $f = k\,u$, alors $f' = k\,u'$; ou $f = u\,v$, alors $f' = u'v+v'u$; • si c'est un quotient : $f = \dfrac{u}{k}$, alors $f' = \dfrac{u'}{k}$; ou $f = \dfrac{k}{v}$, alors $f' = \dfrac{-kv'}{(v)^2}$; ou $f = \dfrac{u}{v}$, alors $f' = \dfrac{u'v-v'u}{(v)^2}$.
déterminer l'équation réduite de la tangente en A	On calcule le nombre dérivé $f'(a)$, avec la formule $f'(x)$; on calcule $f(a)$, ordonnée du point A, avec l'expression $f(x)$ de la fonction ; on applique l'équation réduite d'une droite : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.
étudier le sens de variation d'une fonction	On étudie le **signe de la dérivée** sur l'intervalle I de définition et on applique le **théorème fondamental** : • si la dérivée est positive sur I, alors la fonction est croissante sur I ; • si la dérivée est négative sur I, alors la fonction est décroissante sur I.
rechercher un extremum	Sur un intervalle, là où la dérivée **s'annule en changeant de signe**, la fonction change de sens de variation et elle admet donc un extremum sur cet intervalle.

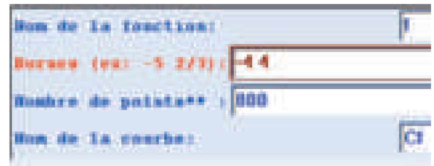
VISUALISATION DE LA FONCTION DÉRIVÉE À L'AIDE DE GEOPLAN

On se propose de construire point par point la courbe de la fonction dérivée d'une fonction f, en déterminant une valeur approchée du nombre dérivé en tout réel.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

A : Tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ et d'un point A décrivant la courbe

a) Créer une variable x :
Créer / Numérique / Variable réelle libre dans un intervalle
Bornes : $-4\ 4$ **Nom de la variable :** x

b) Créer la fonction f et sa courbe $\mathscr{C}_f$:
Créer / Numérique / Fonction numérique / A 1 variable
Créer / Ligne / Courbe / Graphe d'une fonction déjà créée
et valider l'écran ci-contre par Ok.
Créer / Point / Point repéré / Dans le plan
Abscisse : x **Ordonnée :** $f(x)$ **Nom du point :** A



B : Tracé d'une sécante passant par A et A' très proche de A

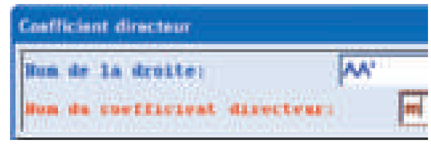
a) Créer le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $x + 0{,}0001$, de la même manière que A, et la droite (AA') :
Créer / Ligne / Droite(s) / Définie par 2 points : AA'.

b) Piloter le réel x au clavier par Piloter / Piloter au clavier et sélectionner x.

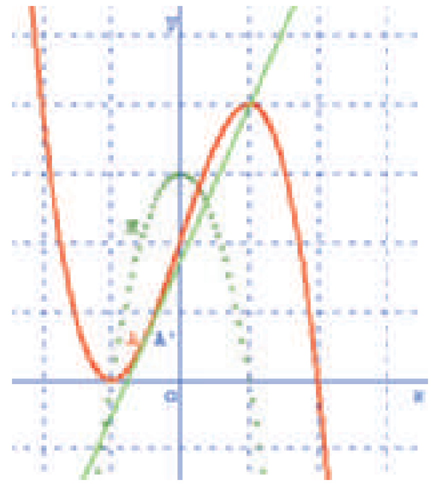
c) Questions
Que représente cette sécante (AA') pour la courbe $\mathscr{C}_f$ lorsque A' est très proche de A ?
Que représente le coefficient directeur de la sécante (AA') pour la fonction f ?
Pour quelle valeur de x, la sécante est-elle parallèle à l'axe des abscisses ?

C : Construction point par point de la courbe de la dérivée

a) Créer m, coefficient directeur de la sécante (AA') :
Créer / Numérique / Calcul géométrique / Coefficient directeur
et valider l'écran ci-contre.



b) Créer le point $M(x\ ;\ m)$ dans le repère du plan.
Pour suivre la trace du point M : Afficher / Sélection Trace,
et sélectionner le point M. Appuyer de la barre d'outils.
On obtient la figure ci-contre.



c) Questions
- Quelle semble être la nature de la courbe décrite par le point M ?
- Lorsque la droite (AA') est horizontale, où se situe le point M ?
- Faire le lien entre le sens de variation de la fonction f et le signe du coefficient directeur de la droite (AA').
Où se situe alors le point M ?
- Modifier la fonction f par et reprendre les questions précédentes.

LA PAGE DE CALCUL

1. Calcul algébrique

1 Développer : $A(x) = (2+x)^2 - 2(2+x) - 4$;
$B(x) = -2(-3+x)^2 + 3(-3+x) + 27$;
$C(x) = (x-1)^3 - 3(x-1)^2$.

2 Réduire au même dénominateur :
$A(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{3}{x}$; $B(x) = \dfrac{2x+5}{x+2} - \dfrac{5}{2}$;
$C(x) = \dfrac{x-1}{x+2} - \dfrac{2x-3}{x^2+2x} + \dfrac{3}{x}$.

3 1° Soit $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Développer :
a) $f(2+h)$; b) $f(-3+h)$; c) $f(1-h)$.
2° Soit $f(x) = \dfrac{x-3}{x}$. Déterminer :
a) $f(1+h)$; b) $f(-2+h)$; c) $f(3+h)$.

4 Soit $f(x) = \dfrac{-3x}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Mettre sous forme d'un quotient :
a) $f(2+h) - f(2)$; b) $f(-2+h) - f(-2)$;
c) $\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$; d) $\dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$.

2. Étude de signe

5 Sans utiliser le discriminant, donner le signe des expressions suivantes. On pourra indiquer l'allure de la parabole.
$A(x) = -x^2 + 1$; $B(x) = (x-3)^2 + 1$;
$C(x) = -x^2 + 3x$; $D(x) = -(x+1)^2 - 2$;
$E(x) = x^2 + 9$; $F(x) = x^2 - 5$.

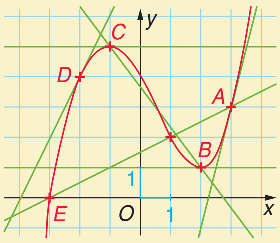
6 Étudier le signe des trinômes à l'aide du discriminant, **sans calculatrice.**
$A(x) = x^2 + 3x - 4$; $B(x) = 2x^2 - x - 3$;
$C(x) = -x^2 + x + 2$; $D(x) = -3x^2 + 4x + 5$.

7 Étudier le signe des trinômes :
$A(x) = 4x^2 - 3x + 5$; $B(x) = -0{,}2x^2 - 5x$;
$C(x) = -100x^2 + 403x - 12$;
$D(x) = 0{,}03x^2 + 8{,}5x - 500$.

8 Écrire sous forme d'un quotient et étudier le signe à l'aide d'un tableau :
$A(x) = \dfrac{1}{x} - 4$; $B(x) = \dfrac{-4}{x+2} + 1$;
$C(x) = \dfrac{9}{x^2} - 1$; $D(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2} + 4$.

3. Lectures graphiques

9 Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative d'une fonction f .

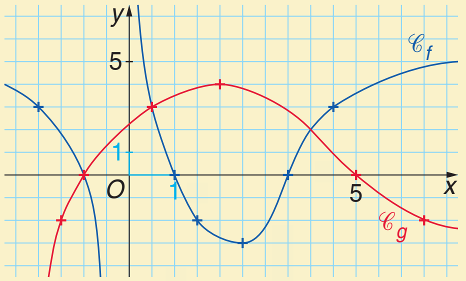


Lire le coefficient directeur de chaque droite tracée :
(AE) , (BC) , T_A , T_B , T_C et T_D .

10 Dans un repère orthonormal, tracer chaque droite connaissant un point et son coefficient directeur.
$\mathscr{D}_1$: $A(2\,;3)$ et $m = -\dfrac{4}{3}$; $\mathscr{D}_2$: $B(5\,;1)$ et $m = \dfrac{1}{3}$;
$\mathscr{D}_3$: $C(-2\,;4)$ et $m = -1$; $\mathscr{D}_4$: $E(-1\,;-1)$ et $m = 2$.

11 1° Dresser le tableau des variations de la fonction f de l'exercice 9.
2° Résoudre graphiquement, en expliquant :
a) $f(x) \leqslant -2x$; b) $f(x) = \dfrac{x+3}{2}$.

12 Soit f la fonction représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous et définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et représentée par la courbe $\mathscr{C}_g$.



1° Dresser le tableau des variations de f et de g .
2° Résoudre graphiquement, en expliquant :
a) $f(x) = g(x)$; b) $f(x) \leqslant 3$; c) $g(x) > -2$.
3° a) Dresser le tableau de signes de $f(x)$ et celui de $g(x)$.
b) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

1. Limite en 0. Accroissement moyen

1. Questions rapides

13 **Q.C.M.** Donner les bonnes réponses.

1° Soit $f(x) = \dfrac{8x-3}{x+3}$ défini sur $]-3\,;+\infty[$.

Sa limite en 0 est :

ⓐ -1 ⓑ $\dfrac{5}{4}$ ⓒ 8 ⓓ infinie

2° Soit $f(x) = \sqrt{x-4}$. Sa limite en 0 est :

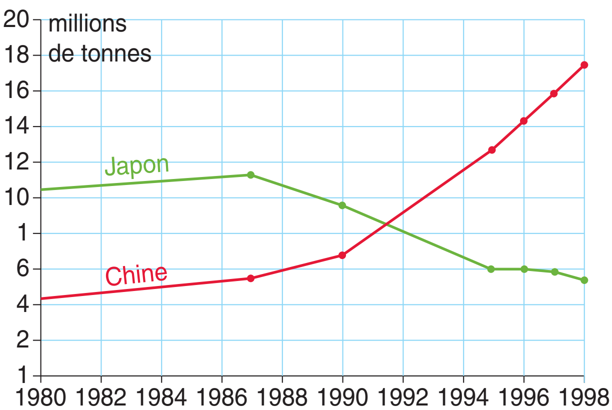
ⓐ -4 ⓑ -2 ⓒ n'existe pas ⓓ infinie

3° Soit $f(x) = \dfrac{-x^2+6x}{2x}$. Sa limite en 0 est :

ⓐ 0 ⓑ 3 ⓒ infinie ⓓ n'existe pas

14 **Vrai ou Faux** ? Justifier.

Le graphique présente les captures de poissons par an, en millions de tonnes.



1° L'accroissement moyen des captures pour la Chine entre 1980 et 1998 est plus important qu'entre 1990 et 1998.

2° Sur [1980 ; 1987] , l'accroissement moyen des captures est pratiquement le même pour la Chine et le Japon.

3° L'accroissement moyen sur [1995 ; 1998] pour la Chine est le plus fort.

2. Applications directes

[Calculer un accroissement moyen, p. 141]

15 Le nombre d'intermittents du spectacle indemnisés par l'Assedic était de 41 000 en 1991 et de 104 700 en 2003.

Calculer l'accroissement moyen annuel arrondi à la dizaine.

Si la tendance se maintient, calculer le nombre d'intermittents indemnisés en 2007.

16 Les loyers sont indexés sur l'indice du coût à la construction, indice base 100 en 1953.

On donne quelques valeurs de l'indice :

année	1960	1973	1979	1984	1993	1999	2003
indices	142	271	521	811	1 016	1 072	1 200

Comparer les accroissements moyens sur : [1960 ; 1973] , [1973 ; 1984] , [1984 ; 2003] .

[Calculer le coût marginal du q-ième objet, p. 141]

17 Soit $C(q) = q^2 + q + 80$ un coût de production, en €, pour q entier de 0 à 20.

Calculer le coût marginal du 3^{e} objet, puis du 10^{e} objet.

Exprimer le coût marginal du q-ième objet en fonction de q , pour q entier de 1 à 20.

18 Dans un atelier fabriquant des objets de luxe, le coût total de fabrication de q objets identiques est donné, en €, par :

$$C(q) = q^3 + 2q^2 + 1\,000 \ .$$

Calculer le coût marginal du 4^{e} objet, puis du 7^{e} objet.

Exprimer le coût marginal du q-ième objet.

[Déterminer une limite en 0, p. 141]

19 Déterminer les limites :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2x-1)(x+1)+1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} (x^2-3x+2)$; d) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2-4)$;

e) $\lim\limits_{x\to 1} (x+4)(2x-3)$; f) $\lim\limits_{x\to 0} -x^2(x+1)$;

g) $\lim\limits_{x\to -2} (-x^2+x+1)$; h) $\lim\limits_{x\to 1} (x^2+x)$.

Guesmi.B

20 Soit $f(x) = x^2 - 3x$ défini sur $[0\,;+\infty[$.

a) Déterminer la limite de f en 0.

b) Exprimer en fonction de h :

$$Q(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h},$$

puis calculer $\lim\limits_{h\to 0} Q(h)$.

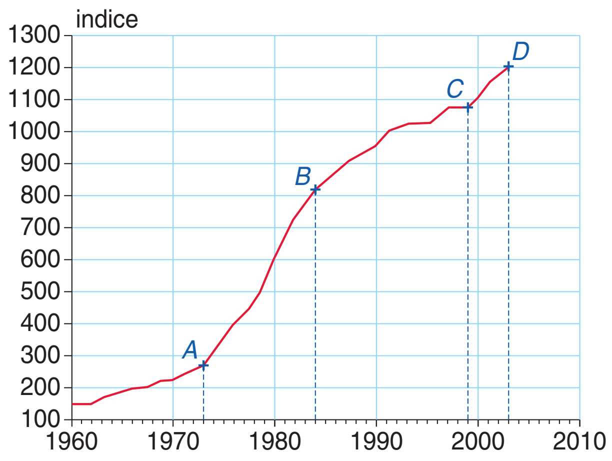
21 Soit $f(x) = \dfrac{3-x}{x+3}$ défini sur $]-3\,;+\infty[$.

a) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

b) Exprimer $\Delta f = f(-1+h) - f(-1)$ en fonction de h, puis calculer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\Delta f}{h}$.

3. Lien avec les fonctions affines

22 L'indice du coût à la construction depuis 1960 est représenté ci-dessous.



On utilise les valeurs données en exercice 16, et on prend $x = 0$ en 1980.

1° Sur $[-7\,;4]$, calculer l'accroissement moyen de l'indice et en déduire une fonction affine f qui approche cet indice.

Si la tendance s'était maintenue, quel aurait été l'indice en 1993 ?

2° Déterminer la fonction affine g telle que : $g(4) = 811$ et $g(23) = 1\,200$, sur $[4\,;23]$.

Cette fonction donne-t-elle une bonne approximation de l'indice ?

Comparer avec la fonction affine h représentée par la droite (CD).

23 Soit $f(x) = x^3 + 3x^2$ défini sur $[0\,;+\infty[$.

1° Visualiser sa courbe $\mathscr{C}_f$ à l'écran d'une calculatrice dans une fenêtre :

$$X \in [0\,;5] \quad \text{et} \quad Y \in [0\,;20].$$

Quel est le sens de variation de f ? Le justifier à l'aide d'une somme de fonctions.

2° Calculer $f(3) - f(2)$, puis déterminer la fonction affine g telle que :

$$g(3) = f(3) \quad \text{et} \quad g(2) = f(2).$$

Visualiser sa courbe $\mathscr{C}_g$ et commenter.

3° Faire de même pour la fonction affine k ayant les mêmes images que f en 4 et en 5.

24 Soit $C(x) = 0{,}1x^2 + 4x + 10$ sur $[0\,;20]$, coût total de production de x kg de produit.

1° a) Étudier le sens de variation du coût total et indiquer les valeurs extrêmes.

b) Exprimer le coût moyen C_M en fonction de x sur $]0\,;20]$ et déterminer son sens de variation.

On rappelle que $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

c) Soit $D(x) = C(x) - C(x-1)$.

Exprimer $D(x)$ en fonction de x.

Quel est le sens de variation de cette fonction D ?

2° a) Calculer le coût marginal $C(10) - C(9)$ du 10^e kg produit.

b) Déterminer la fonction affine f, telle que :

$$f(10) = C(10) \quad \text{et} \quad f(9) = C(9).$$

Calculer $f(10{,}1)$ et $f(9{,}9)$.

c) Exprimer $\dfrac{C(10+h) - C(10)}{h}$ en fonction de h.

Comparer la limite de ce quotient quand h tend vers 0 à $\dfrac{f(10{,}1) - f(10)}{0{,}1}$ et au coût marginal du 10^e kg.

2. Nombre dérivé en a et tangente en A

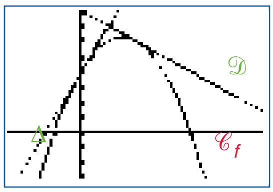
1. Questions rapides

25 **Q.C.M.** Trouver *toutes* les bonnes réponses.

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = -x^2 + 3x + 4$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe : les points sont des points à coordonnées entières.



1° Le nombre dérivé de f en 2 est :

(a) le quotient $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$

(b) le coefficient directeur de $\mathscr{D}$

2° $f'(0)$ vaut :

(a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - 4}{h}$ (b) $-h + 3$ (c) 3

3° Le nombre dérivé de f en 3 est :

(a) positif (b) négatif (c) $\dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$

4° Le nombre dérivé de f est :

(a) nul en 1 (b) nul en 4 (c) jamais nul

2. Applications directes

[Calculer un nombre dérivé par la définition, p. 143]

26 Calculer le nombre dérivé de f en a.

1° $f(x) = -x^2 + x + 1$ en $a = 2$, puis en $a = -1$.

2° $f(x) = (x+3)(2x-1)$ en $a = -1$.

27 Même exercice.

1° $f(x) = \dfrac{4}{x+2}$ en $a = -1$, puis en $a = 2$.

2° $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$ en $a = 0$, puis en $a = 1$.

3° $f(x) = \dfrac{-6x}{x-1}$ en $a = 4$, puis en $a = 2$.

28 Calculer le nombre dérivé de f en a.

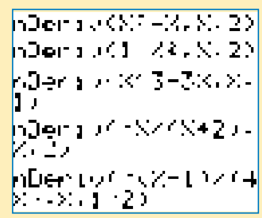
1° $f(x) = \dfrac{1}{x}$, a réel non nul.

2° $f(x) = x^3$, a réel.

3° $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, a réel non nul.

[Utiliser la calculatrice pour obtenir un nombre dérivé, p. 143]

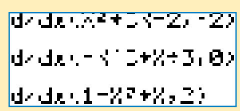
29 1° **Sur T. I.** Quels sont les nombres dérivés demandés ci-contre ?

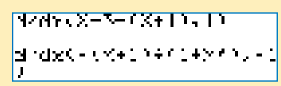


Les calculer et interpréter les valeurs obtenues.

Comment obtenir un résultat plus explicite ?

2° **Sur Casio.** Donner les nombres dérivés demandés ci-dessous ?





30 À la calculatrice, calculer les nombres dérivés demandés en exercices 26 et 27.

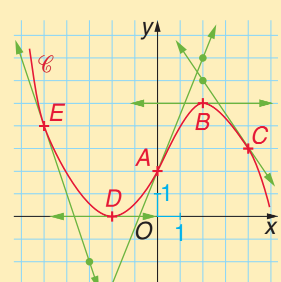
[Déterminer l'équation réduite d'une tangente, p. 143]

31 On considère la fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, représentée par la courbe $\mathscr{C}$ et quelques tangentes à cette courbe $\mathscr{C}$.

1° Lire $f(2)$, $f(0)$ et $f(4)$.

Lire $f'(4)$, $f'(-2)$ et $f'(0)$.

2° Déterminer l'équation réduite de chacune des tangentes à $\mathscr{C}$, tracées.



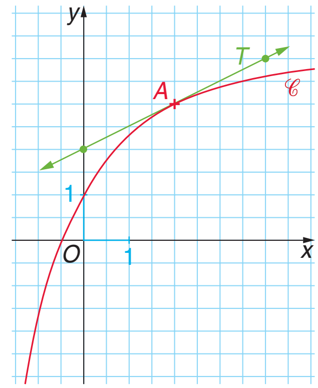
32 1° Soit $f(x) = \dfrac{3x}{x-1}$ défini sur $]1\,;+\infty[$.
À l'aide de la calculatrice, calculer $f'(a)$, avec $a = 2$.
En déduire l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a.
2° Faire de même pour $f(x) = -x^2 + x - 3$ défini sur $\mathbb{R}$, pour $a = -1$.

3. Approximation affine

33 1° Soit $f(x) = (1+x)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
Calculer le nombre dérivé de f en 0.
En déduire l'approximation affine de f en 0.

2° Mêmes questions pour $f(x) = (1+x)^3$ défini sur $\mathbb{R}$.

34 Soit f une fonction représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-contre.
T est la tangente à $\mathscr{C}$ en A.



a) Donner l'équation réduite de T sous la forme :

$$y = ax + b\,.$$

b) La fonction affine g définie par :

$$g(x) = ax + b$$

approche la fonction f pour x proche de 2.
En déduire une valeur approchée de $f(2{,}1)$, de $f(1{,}99)$ et de $f(2{,}05)$.

3. Fonction dérivée et sens de variation

1. Questions rapides

35 **Vrai ou Faux ?** Justifier la réponse.

1° Si, pour tout réel x, le nombre dérivé $f'(x)$ existe, alors la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

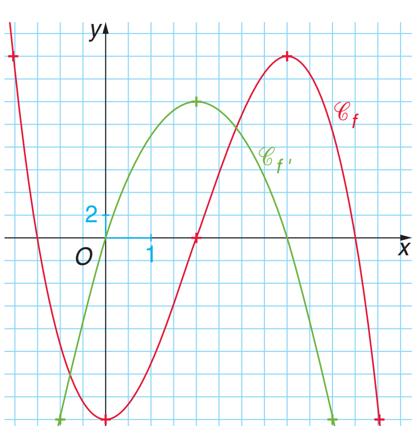
2° Soit f une fonction dérivable sur I. Si la fonction est croissante sur I, alors sa dérivée est positive sur I.

3° Une fonction f, définie sur un intervalle, est dérivable sur cet intervalle.

4° Si la fonction f est négative sur I, alors sa dérivée est décroissante sur I.

5° Si la dérivée est nulle en 3, alors la fonction est constante en 3.

36 **Q.C.M.** Trouver *toutes* les bonnes réponses.
$\mathscr{C}_f$ est la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_{f'}$, celle de sa dérivée.



1° Le nombre dérivé de f en 2 est :

(a) 0 (b) 12

(c) 6

2° On peut dire que :

(a) $f'(3) \geqslant 0$

(b) $f'(0) = 0$

(c) $f'(-1) \leqslant 0$

3° La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en 1 :

(a) passe par l'origine O

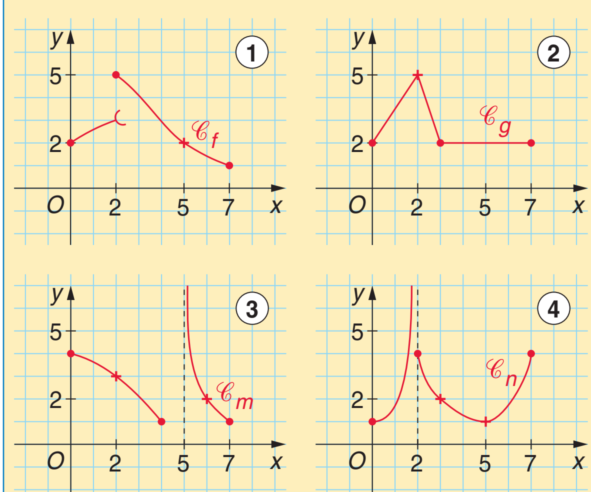
(b) est parallèle à celle en 3

(c) recoupe la courbe $\mathscr{C}_f$

2. Applications directes

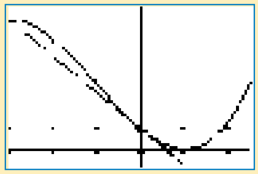
[Reconnaître une fonction non dérivable, p. 145]

37 Pour chaque fonction, indiquer pourquoi elle n'est pas dérivable sur $[0\,;7]$.

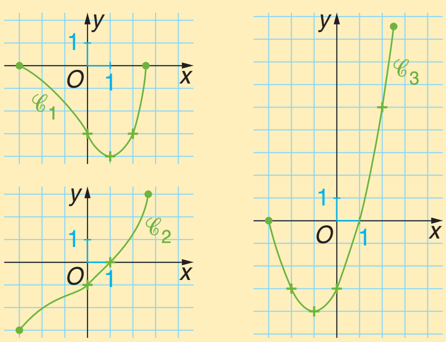


[Reconnaître la courbe de la dérivée, p. 145]

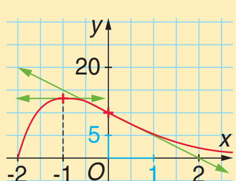
38 La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est celle d'une fonction f définie et dérivable sur $[-3\,;2{,}5]$.
Les droites sont des tangentes à la courbe $\mathscr{C}$.



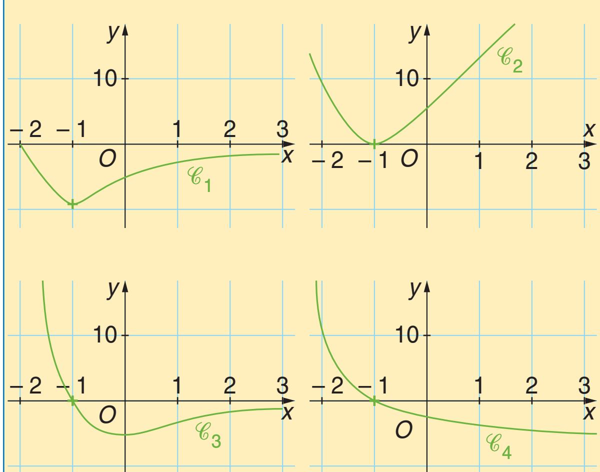
L'une des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ ou $\mathscr{C}_3$ est celle de sa dérivée. Laquelle ?



39 La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est celle d'une fonction définie et dérivable sur $[-2\,;3]$.
Les points marqués + sont des points à coordonnées entières.

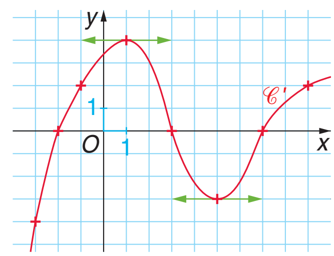


L'une des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ ou $\mathscr{C}_4$ est celle de sa dérivée. Laquelle ?



3. Sens de variation

40 La courbe $\mathscr{C}'$ est la courbe représentative de la dérivée f' d'une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
D'après ce graphique, donner le signe de $f'(x)$.
En déduire les variations de f.
Préciser le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.



41 Une fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;5]$.
On connaît le tableau des variations de sa fonction dérivée f'.

x	$-\infty$	1	5
$f'(x)$	↘	-2	↗ 4

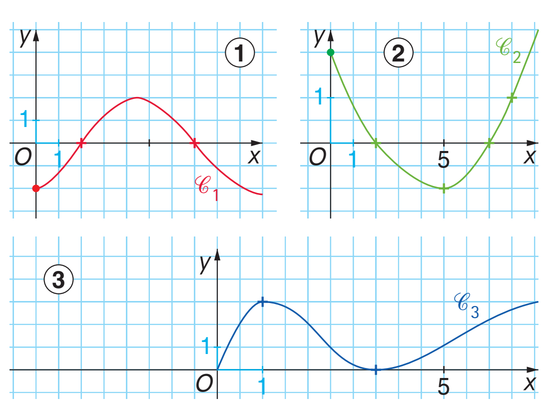
De plus, l'équation $f'(x) = 0$ a pour ensemble solution :
$$S = \{-3\,;3\}.$$
Dresser le tableau de signe de $f'(x)$.
En déduire le sens de variation de f.

42 La dérivée f' d'une fonction f, dérivable sur $[-4\,;9]$, est connue par son tableau des variations.

x	-4	0	5	7	9
$f'(x)$	2	↗ 4	↘ 0	↘ -2	↗ 0

Déterminer le sens de variation de la fonction f.

43 Chaque courbe ci-dessous est celle de la dérivée d'une fonction f, dérivable sur $[0\,;+\infty[$.
Pour chacune d'elles, dresser le tableau des variations de la fonction f en indiquant le signe de la dérivée.



4. Calcul de dérivées

1. Questions rapides

44 Soit $f(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{Z}$, pour tout réel x .

a) Redonner la dérivée pour n entier naturel.

Appliquer la formule pour $n = 7$.

b) Donner une autre écriture de $f(x) = x^n$, où $n = -2$. Redonner sa dérivée. Établir une formule générale pour la dérivée de $f(x) = x^n$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

45 Soit $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

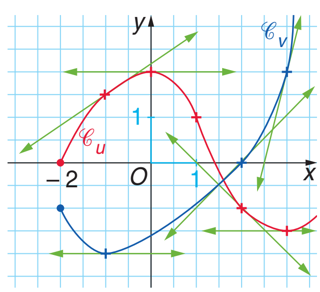
Soit h un réel non nul tel que $x+h > 0$.

Montrer que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} .$$

En déduire que f est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$, mais pas en 0.

46 Deux fonctions u et v , dérivables sur $[-2\,;+\infty\,[$, sont représentées ci-dessous.



1° a) Lire $u'(2)$ et $v'(2)$.

En déduire le nombre dérivé de la somme $u+v$ en 2.

b) Faire de même en 3 et en – 1.

2° Donner le nombre dérivé de la fonction $3v$ en 2 et le nombre dérivé de la fonction $-\frac{1}{2}u$ en 3.

47 **Forme et dérivée. Q.C.M.**

Indiquer la formule de dérivée la plus adaptée en choisissant la forme de f proposée.

1° Pour $f(x) = \dfrac{3x^2-5x+3}{2}$:

ⓐ $f = k\,u$ ⓑ $f = \dfrac{u}{v}$ ⓒ $f = u+v$

2° Pour $f(x) = \left(\dfrac{2x-3}{5}\right)(x^2-1)$:

ⓐ $f = u+v$ ⓑ $f = u \times v$ ⓒ $f = \dfrac{u}{v}$

3° Pour $f(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{2x}$:

ⓐ $f = \dfrac{u}{v}$ ⓑ $f = \dfrac{u}{k}$ ⓒ $f = u+v$

4° Pour $f(x) = \dfrac{4(x^2-9)(x+1)}{x+1}$:

ⓐ $f = u \times v$ ⓑ $f = k\,u$ ⓒ $f = \dfrac{u}{v}$

2. Applications directes

[Calculer la dérivée d'une somme, p. 147]

48 Pour chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, calculer $f'(x)$.

$f(x) = x^2+2x-3$; $g(x) = -x^2+x+1$;

$h(x) = \frac{3}{4}x^2-5x+\frac{1}{2}$; $k(x) = -\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-6$.

49 Même exercice **pour $x \in \mathbb{R}$** .

$f(x) = -x^6+x^4-6$; $g(x) = 4x^3-3x^2$;

$h(x) = -5x^2+\frac{x}{10}+1$;

$k(x) = -\frac{5}{3}x^3+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+4$.

50 Même exercice pour $x \in\,]\,0\,;+\infty\,[$.

$f(x) = \dfrac{4x^2-2x+3}{4}$; $g(x) = \dfrac{x^2-3x}{6}$;

$h(x) = \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{x}$; $k(x) = 2x-5+\dfrac{1}{x^2}$;

$l(x) = 2x-3-\sqrt{x}$; $m(x) = -\dfrac{x}{4}+2+2\sqrt{x}$.

[Étudier les variations d'une fonction polynôme, p. 147]

51 1° Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3-3x+2 .$$

Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau des variations de f .

2° Faire de même pour :

$$g(x) = -x^3+6x^2-8 \text{ , sur } \mathbb{R} .$$

52 La fonction f est définie sur $[\,0\,;10\,]$ par :

$$f(x) = x^3-2x^2+x-3 .$$

Étudier le sens de variation de f à l'aide de la dérivée $f'(x)$.

Guesmi.B

53 Soit $C(q) = q^3 - 6q^2 + 13q + 9$ défini sur $[0 ; +\infty[$.

Calculer $C'(q)$ et étudier son signe.

En déduire le sens de variation de la fonction C .

54 Soit $B(x) = \frac{x^3}{3} - 16x^2 + 220x$ défini sur $[0 ; 18]$.

Calculer $B'(x)$ et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.

En déduire le sens de variation de B sur $[0 ; 18]$.

[Calculer la dérivée de fonctions, p. 147]

Dans les **exercices de 55 à 61**, bien regarder la forme de la fonction avant de calculer la dérivée.

55 Fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = (1 - 2x)(x^2 + 9)$;

$g(q) = -3q^2(2q + 1)$;

$h(x) = (5x - 1)^2$; $k(x) = 4(2 + 3x)^2$.

56 Fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = 3x + 1 - (x - 1)^2$; $g(x) = x^3(1 - x)^2$;

$h(x) = -5x + 3(2x - 3)^2$; $k(t) = -3(t + 2)^2$.

57 Fonctions définies sur $[0 ; +\infty[$ et dérivables sur $]0 ; +\infty[$.

$f(x) = (2x - 1)\sqrt{x}$; $g(x) = 3\sqrt{x} - x + 2$;

$h(q) = -3q + 4\sqrt{q}$; $k(x) = (3 - 2x)\sqrt{x}$.

On donnera la dérivée sous la forme d'un quotient de dénominateur $\sqrt{x}$ ou $2\sqrt{x}$.

58 Fonctions définies sur $]0 ; +\infty[$.

$f(x) = \frac{6x^2 - 2x + 1}{x}$; $g(x) = \frac{4 - x^2}{4x}$;

$h(t) = 3t - 5 + \frac{3}{2t}$; $k(x) = (x - 3)\left(\frac{1}{x} - 1\right)$.

59 Fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = \frac{3}{x^2 + 4}$; $g(x) = \frac{-4x + 1}{x^2 + 1}$;

$h(x) = \frac{-x + 3}{x^2 + x + 1}$; $k(x) = \frac{3x^2 - x}{4}$.

60 $f(q) = -5q + 1 - \frac{20}{q}$ sur $]0 ; +\infty[$;

$g(x) = \frac{2x + 1}{4x - 3}$ sur $]\frac{3}{4} ; +\infty[$;

$h(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 4}$ sur $]-\infty ; -2[$;

$k(x) = \frac{3x - 4}{x^2 - 5x + 6}$ sur $]3 ; +\infty[$.

61 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$;

$g(x) = 4x - 3 + \frac{1}{x - 2}$ sur $]2 ; +\infty[$;

$h(t) = \frac{1}{t} - 1 + 4t^2$ sur $]-\infty ; 0[$.

[Établir le lien entre coût moyen et coût marginal, p. 147]

62 Soit $C(x) = x^2 + 2x + 100$ le coût total de production, en €, pour des quantités x , avec $x \in [0 ; 15]$.

Déterminer le coût moyen et le coût marginal en fonction de x , pour $x \in]0 ; 15]$.

Dresser le tableau des variations du coût moyen et vérifier que lorsque le coût moyen est minimum, il est égal au coût marginal.

63 Même exercice pour :

$C(q) = q^3 + 12q + 54$, pour $q \in [0 ; 7]$.

On rappelle que si $q \geqslant 3$, alors $q^3 \geqslant 27$.

Visualiser les courbes de coût moyen et de coût marginal à l'écran d'une calculatrice pour $X \in [0 ; 7]$ et $Y \in [0 ; 160]$ par pas de 20.

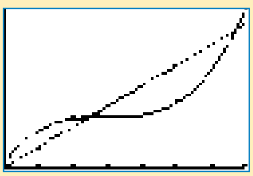
64 Une entreprise fabrique et vend un article de luxe. Pour une quantité x comprise entre 0 et 70 articles, le coût de fabrication de x articles, en euros, est donné par :

$$f(x) = x^3 - 90x^2 + 2\,700x + 3\,000 .$$

Chaque article produit est vendu au prix unitaire de 1 200 €.

1° Déterminer le coût marginal en fonction de la quantité x .

2° Montrer que le coût marginal est égal au prix unitaire lorsque l'on fabrique 50 articles.



3° Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, obtenues sur une calculatrice graphique, représentent la fonction f du coût de fabrication et la fonction g de la recette pour $x \in [0 ; 70]$.

Donner une interprétation graphique du résultat obtenu à la question 2 °.

Guesmi.B

3. Dérivée et tangente

65 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 3x \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 - x + 2 \ .$$

Démontrer que, en leur point d'abscisse -1, les tangentes respectives à $\mathscr{C}_f$ et à $\mathscr{C}_g$ sont parallèles.

66 On considère les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ d'équations respectives $y = -x^2 + 3x + 6$, $y = x^3 - x^2 + 4$ et $y = x^2 + 7x + 8$.

Montrer que ces trois courbes passent par le point $A(-1\,;2)$ et qu'elles admettent en ce point la même tangente T.

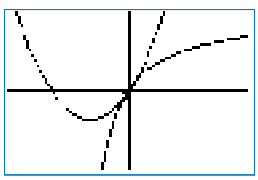
67 Soit les fonctions f et g, telles que :

$$f(x) = \frac{3x}{x+2} \quad \text{sur }]-2\,;+\infty[$$

$$\text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x \quad \text{sur } \mathbb{R} \ .$$

Leurs courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ semblent être tangentes à l'origine.

Le démontrer.



68 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\,;0\}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x} \ .$$

1° Démontrer que la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2 passe par l'origine.

2° Déterminer les coordonnées des points d'intersection de T avec la courbe $\mathscr{C}_f$.

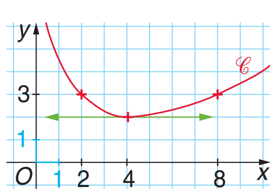
En déduire, suivant les valeurs de x, la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente T.

69 La courbe $\mathscr{C}$, ci-dessous, est celle d'une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} \ .$$

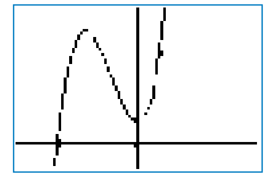
1° Exprimer $f'(x)$ à l'aide de a, b et c.

2° En utilisant deux points de la courbe et la tangente tracée, déterminer les réels a, b et c.



70 La courbe $\mathscr{C}$, à l'écran d'une calculatrice, est celle d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ .$$



La courbe $\mathscr{C}$ traverse l'axe des ordonnées en $A(0\,;1)$, passe par $C(-1\,;3)$ et $B(-2\,;5)$.

Les tangentes à $\mathscr{C}$ en A et B sont horizontales.

Déterminer les réels a, b, c et d.

4. Sens de variation

71 On se propose de faire le lien entre le sens de variation, par la dérivée, et l'étude des variations d'une fonction polynôme du 2e degré.

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

1° Déterminer $f'(x)$. Résoudre $f'(x) = 0$ et étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de a.

2° Rappeler le sens de variation de la fonction f vue au chapitre 4. Faire le lien.

3° *Application* : Soit $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.

Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.

72 Une fonction homographique est une fonction donnée par :

$$f(x) = \frac{ax+b}{x+c} \ ,$$

où a, b et c sont des réels, avec $\frac{b}{a} \neq c$.

1° a) Vérifier que si $\frac{b}{a} = c$, alors f est une fonction constante.

b) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

2° Déterminer $f'(x)$.

Montrer que la dérivée dépend du signe de $ac - b$.

3° *Application* :

Soit $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.

Pour les exercices 73 à 79, calculer la dérivée, étudier son signe et dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'ensemble de définition donné.
On complètera par la valeur des extremums locaux.

73 $f(x) = x^3 - 0{,}3x^2$ sur $\mathbb{R}$.

74 $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Guesmi.B

75 $f(x) = x-3+\dfrac{4}{x+2}$ sur $]-2\,;+\infty[$.

76 $f(x) = \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-2}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\,;2\}$.

77 $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

78 $f(x) = x+1-\dfrac{4}{x-2}$ sur $]-\infty\,;2[$.

79 $f(x) = x^3-6x^2+17x+4$ sur $\mathbb{R}$.

80 En regardant la forme de $f(x)$, dire si le calcul de la dérivée est nécessaire pour étudier le sens de variation de la fonction f .

Sinon indiquer si on peut utiliser une somme de fonctions, ou une fonction composée, pour donner le sens de variation de f . On ne demande pas de calculer la dérivée.

a) $f(x) = -2(x-3)^2$ sur $\mathbb{R}$;

b) $f(x) = (x-2)^2-1$ sur $\mathbb{R}$;

c) $f(x) = -x+1+\dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$;

d) $f(x) = x^2-\dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

81 Même exercice :

a) $f(x) = 2x-1+\dfrac{4}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$;

b) $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2+1}$ sur $\mathbb{R}$;

c) $f(x) = x^2+4+\dfrac{1}{x-2}$ sur $]2\,;+\infty[$;

d) $f(x) = \left(\dfrac{1}{x}-3\right)^2$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

82 Même exercice :

a) $f(x) = x^3+\sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$;

b) $f(x) = -2\sqrt{x}+1$ sur $[0\,;+\infty[$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}-\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$;

d) $f(x) = (x-4)\sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$.

83 1° Étudier le signe de $\dfrac{3x-3}{2\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$.

2° Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = (x-3)\sqrt{x} .$$

a) Calculer $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

Étudier son signe (on fera le lien avec la question 1°).

b) En déduire le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

Préciser les extremums, s'ils existent.

84 Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = (3-2x)\sqrt{x} .$$

85 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2+80x+400 .$$

Démontrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ est monotone sur $]0\,;+\infty[$.

Une fonction est **monotone** sur I , si elle est croissante sur I ou décroissante sur I ; autrement dit, si elle ne change pas de sens de variation sur I .

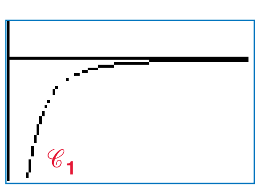
5. Exercices de synthèse

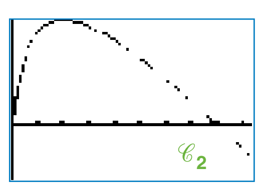
1. Fonctions conjointes

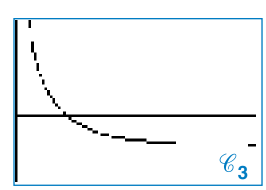
86 Trois fonctions f , g et h sont dérivables sur $[0\,;+\infty[$.

Elles sont représentées par les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ mais dans le désordre.

On sait que la fonction h est la dérivée de g et que g est la dérivée de f .







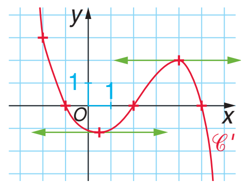
1° Retrouver leurs courbes représentatives, en expliquant.

2° La fonction f est de la forme $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+1}$.

Sachant que $f(0) = 0$, $f(2) = 4$ et la fonction f admet un maximum, établir trois équations d'inconnues a , b et c .

Résoudre le système et en déduire l'expression $f(x)$.

87 La courbe $\mathscr{C}'$, ci-contre, est celle de la dérivée f' d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



1° Déterminer, en justifiant avec soin, le sens de variation de la fonction f.

2° Soit $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction f.

a) En quelle abscisse positive la courbe $\mathscr{C}$ admet-elle une tangente de coefficient directeur 2 ?

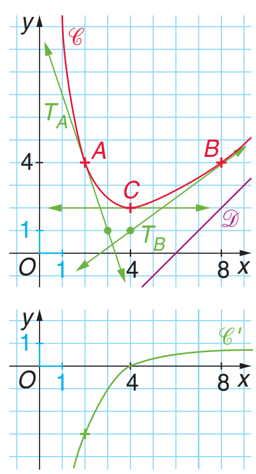
b) En combien de points la courbe $\mathscr{C}$ a-t-elle une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$?

88 La courbe $\mathscr{C}$ est celle d'une fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x}\text{, où } a,\ b \text{ et } c \text{ sont des réels.}$$

T_A et T_B sont deux tangentes à $\mathscr{C}$.

La courbe $\mathscr{C}'$ est celle de sa dérivée f'.



1° a) Donner deux informations sur les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ qui permettent de justifier que $\mathscr{C}'$ est la courbe de la dérivée de f.

b) Comment lire $f'(2)$ sur la courbe $\mathscr{C}$?

Lire également $f'(8)$.

2° a) La courbe $\mathscr{C}$ passe par A et C : quelles équations, d'inconnues a, b et c, peut-on écrire ?

b) Déterminer $f'(x)$ en fonction de a et c.

Trouver une équation entre a et c en utilisant la tangente en C à la courbe $\mathscr{C}$.

c) Par résolution d'un système, déterminer les réels a, b et c, et en déduire l'expression de $f(x)$.

3° a) Étudier le signe de $f(x) - (x - 6)$. En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

b) Déterminer le point d'intersection N des deux tangentes T_A et T_B.

2. Étude de fonctions

89 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1° Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau des variations de la fonction f.

Préciser la valeur des extremums locaux.

Visualiser la courbe à l'écran de la calculatrice.

Quelle fenêtre choisir pour voir tous les changements de variation de la fonction f ?

2° a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

En donner une interprétation pour la courbe $\mathscr{C}_f$.

On donnera la valeur approchée à 10^{-2} près de chaque solution.

b) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal d'unités 5 cm pour 1 en abscisse et 10 cm pour 1 en ordonnée.

On placera les tangentes horizontales et la tangente T.

90 Soit la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 15x - 9}{x^2 + 9},$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unités 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1° a) Expliquer pourquoi f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer les abscisses des points où la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses (on en donnera les valeurs exactes).

c) Résoudre l'équation $f(x) + 1 = 0$.

En donner une interprétation graphique.

2° a) Calculer $f'(x)$. Étudier son signe et en déduire le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.

Préciser la valeur des extremums locaux.

b) Exprimer $f(x) + \frac{7}{2}$ en fonction de x. Montrer que :

$$f(x) + \frac{7}{2} = \frac{5\,(x+3)^2}{2\,(x^2+9)}.$$

En déduire que $-\frac{7}{2}$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

3° Tracer les tangentes horizontales, placer les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses, tracer la tangente T, puis la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

91 On considère la fonction f définie sur $[-7\,;7]$ par

$f(x) = \dfrac{8x+6}{x^2+1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

1° Calculer $f'(x)$. Étudier son signe et en déduire le tableau des variations de la fonction f sur $[-7\,;7]$.
On précisera la valeur des extremums.

Guesmi.B

2° a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes.

b) Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = -x + 6$.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la droite $\mathscr{D}$.

3° a) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

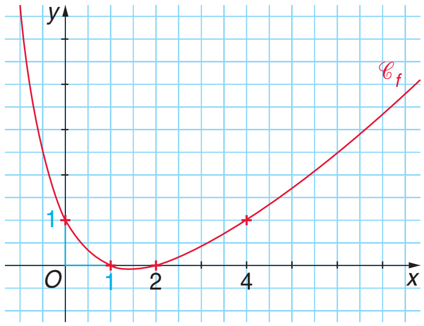
b) Dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, tracer $\mathscr{D}$, T, les tangentes horizontales, puis la courbe $\mathscr{C}_f$.

D'après le graphique, la tangente T coupe-t-elle la courbe $\mathscr{C}_f$? Si oui en quel(s) point(s) ?

92 On considère la fonction f définie sur $[-1 ; 10]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2},$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative ci-dessous.



1° Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $x^2 + 4x - 8$.

En déduire le sens de variation de f sur $[-1 ; 10]$.

2° a) Résoudre algébriquement $f(x) = 0$.

En donner une interprétation graphique.

b) D'après le graphique, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$.

En déterminer les valeurs exactes par le calcul.

3° a) D'après le graphique, en quel point la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ semble être de coefficient directeur $\frac{2}{3}$?

b) Résoudre l'équation $f'(x) = \frac{2}{3}$. Conclure.

3. Applications économiques

93 **L'offre et la demande** d'un produit sont modélisées par deux fonctions f et g, pour un prix au kg x variant de 0 à 10 €. Les quantités offertes $f(x)$ et les quantités demandées $g(x)$ sont exprimées en tonnes.

1° La fonction d'offre est une fonction affine telle que :

$$f(7) = 335 \quad \text{et} \quad f(9) = 415 .$$

Déterminer $f(x)$.

2° La fonction de demande est donnée par :

$$g(x) = x^3 - 12x^2 - 60x + 1\,000 .$$

Démontrer que la fonction de demande est décroissante sur $[0 ; 10]$.

3° Visualiser les deux courbes d'offre et de demande à la calculatrice.

Quel semble être le point d'intersection des deux courbes ? Le vérifier par un calcul d'images, sans chercher à résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

En déduire le prix d'équilibre et la quantité d'équilibre, ainsi que le chiffre d'affaires engendré par la vente de ce produit à l'équilibre.

94 **Situation de monopole pur**

En situation de monopole pur, la quantité demandée étant une fonction décroissante du prix, pour vendre une plus grande quantité de produit, le producteur doit vendre à un prix plus bas.
Ainsi, la recette n'est plus proportionnelle à la quantité comme dans le cas d'une concurrence pure et parfaite.

Une entreprise détient un brevet de fabrication d'un verre léger.

La fonction de demande de ce produit est donnée par :

$$q = 320 - 0{,}05p ,$$

où p est le prix de 10 kg de verre, en €, et q la quantité, en dizaines de kg.

Le coût de fabrication de q dizaines de kg de verre est donné par :

$$C(q) = q^3 - 5q^2 + 400q + 50\,000 ,$$

pour $q \in [0 ; 80]$, c'est-à-dire une quantité produite variant de 0 à 0,8 tonne.

Le coût de fabrication est exprimé en euros.

1° Exprimer le prix p en fonction de la quantité q demandée. Montrer que la recette s'exprime par :

$$R(q) = -20q^2 + 6\,400q .$$

Démontrer que la recette est croissante sur $[0 ; 80]$.

2° Démontrer que le coût de fabrication est croissant sur $[0 ; 80]$.

On sera amené à utiliser le signe de $3x^2 - 10x + 400$.

3° a) Calculer $R'(40)$ et $C'(40)$.

En déduire que la recette marginale est égale au coût marginal lorsque l'on produit 400 kg de verre.

b) Résoudre l'équation $R'(q) = C'(q)$.

Retrouver le résultat précédent.

4° Justifier que le bénéfice réalisé par la production et

Guesmi.B

la vente de q dizaines de kg de ce verre est donné, en euros, par :

$$B(q) = -q^3 - 15q^2 + 6\,000q - 50\,000 ,$$
pour $q \in [0 ; 80]$.

Calculer $B'(q)$, étudier son signe et en déduire le tableau des variations du bénéfice B sur $[0 ; 80]$.

Démontrer que le bénéfice admet un maximum. Pour quelle quantité ?

Calculer alors le prix à proposer sur le marché pour obtenir un bénéfice maximal.

On pourra visualiser les deux courbes de recette et de coût total à l'écran de la calculatrice dans la fenêtre :

$$X \in [0 ; 80] \quad \text{et} \quad Y \in [0 ; 400\,000] .$$

95 **Rythme de croissance d'une population**

La population d'une ville nouvelle est donnée par :

$$f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5} ,$$

pour t le nombre d'années écoulées depuis 1975, et $f(t)$ le nombre d'habitants, en milliers.

On admet que le rythme de croissance de la population est donné par la dérivée de la fonction population, $f'(t)$.

1° Calculer la population en $t = 10$, puis en $t = 11$.

En déduire la variation absolue de population Δf entre ces deux années.

2° a) Calculer $f'(t)$, étudier son signe et en déduire le sens de variation de la population.

b) Calculer $f'(10)$ et $f'(11)$, en donner une valeur approchée à 0,1 millier près.

Comparer à la variation absolue calculée en 1°.

3° a) Calculer le rythme de croissance de la population pour $t = 20$.

b) Quel rythme de croissance peut-on prévoir en 2010 ?

c) Résoudre $\dfrac{120}{(t+5)^2} \leqslant \dfrac{3}{10}$.

En déduire à partir de quel nombre d'années le rythme de croissance devient inférieur ou égal à 0,3 millier d'habitants.

96 **Vitesse de propagation d'une maladie**

Après l'apparition d'une maladie virale, les responsables de la santé publique ont estimé que le nombre de personnes frappées par la maladie au jour t à partir du jour d'apparition du premier cas est :

$$M(t) = 45t^2 - t^3 \quad \text{pour } t \in [0 ; 25] .$$

La vitesse de propagation de la maladie est assimilée à la dérivée du nombre de personnes malades en fonction de t .

1° a) Calculer $M'(t)$.

En déduire la vitesse de propagation le cinquième jour.

b) Déterminer le jour où la vitesse de propagation est maximale et calculer cette vitesse.

2° a) Étudier le sens de variation de la fonction M sur $[0 ; 25]$. On pourra utiliser le calcul fait en 1° a).

b) Dans un repère orthogonal, d'unités 1 cm pour 2 en abscisse et 1 cm pour 1 000 en ordonnée, tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentant le nombre total de personnes frappées par la maladie en fonction du temps t .

On placera les tangentes pour $t = 15$, $t = 10$ et $t = 20$.

Sur l'intervalle $[10 ; 20]$, que peut-on dire du coefficient directeur des tangentes à la courbe $\mathscr{C}$?

97 **Rendements et point d'inflexion**

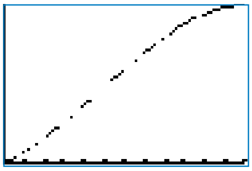
Dans une usine de produits alimentaires, une machine fabriquant de la moutarde est utilisée 12 heures par jour, en continu.

La fonction f , définie sur $[0 ; 12]$ par :

$$f(t) = -t^3 + 15t^2 + 72t ,$$

représente la production totale de moutarde après t heures de fonctionnement.

La dérivée de f , $f'(t)$, représente la **production marginale** de cette machine après t heures d'utilisation.



1° a) Déterminer $f'(t)$.

Déterminer la dérivée de la production marginale, notée $g(t)$.

b) Étudier la production marginale et montrer qu'elle admet un maximum atteint en $t_0 = 5$.

En déduire le signe de la production marginale $f'(t)$.

c) À l'aide de la question précédente, justifier que la production totale est croissante sur $[0 ; 12]$.

d) Visualiser la courbe de la production totale à l'écran d'une calculatrice avec $Y \in [0 ; 1\,300]$.

2° Sur l'intervalle où la production marginale est croissante, on parle de « **phase de rendements croissants** ».

Sur l'intervalle où la production marginale est décroissante, on parle de « **phase de rendements décroissants** ».

À l'instant t_0 , où la production marginale change de sens de variation, le point I d'abscisse t_0 de la courbe $\mathscr{C}$ de la production totale est un **point d'inflexion**.

a) Indiquer les deux phases et le point d'inflexion I pour cette production.

b) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'inflexion I sous la forme $y = h(t)$.

c) Étudier le signe de la différence $f(t) - h(t)$ sur l'intervalle $[0 ; 12]$. On vérifiera que :

$$f(t) - h(t) = -(t-5)^3 .$$

Justifier la phrase : « Au point d'inflexion, la courbe traverse sa tangente. »

1. UTILISATION DE LA CALCULATRICE

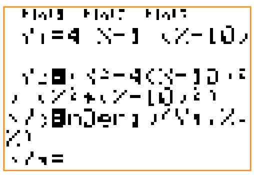
98 Comment vérifier le calcul d'une dérivée à la calculatrice ?

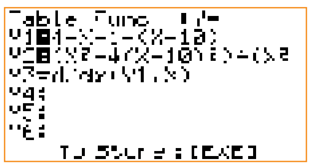
Exemple : Soit $f(x) = \frac{4}{x} - \frac{1}{x-10}$ sur $]0\,;10[$.

Vérifier à la main que $f'(x) = \frac{x^2-4(x-10)^2}{x^2(x-10)^2}$.

Entrer $f(x)$ en Y1 et entrer $f'(x)$ en Y2 .

T.I. : **Casio (*) :**





(*) On ne peut pas voir la formule complète pour $f'(x)$.

Vérifier dans le tableau de valeurs que Y2 et Y3 donnent les mêmes valeurs, sauf en 0 et 10 éventuellement.

Applications : Calculer à la main la dérivée de chacune des fonctions, et vérifier le calcul obtenu avec la calculatrice.

a) $f(x) = -3x^5 + 40x^3 + 135x - 6$ sur $\mathbb{R}$;

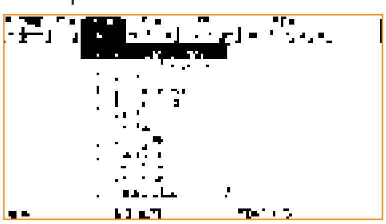
b) $f(x) = -0{,}1x + 12 - \frac{40}{x+1}$ sur $[0\,;30]$;

c) $f(x) = (x-2)\sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$;

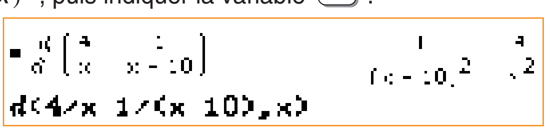
d) $f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{x+3}$ sur $]-3\,;+\infty[$.

99 Comment calculer une dérivée à la calculatrice formelle ?

Exemple : On reprend la fonction f de l'exercice 98.

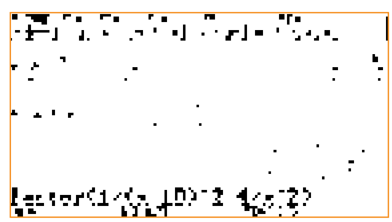


Dans l'écran de Calcul sur **Voyage 200** :
choisir (F3) **1:d(dérivée** (ENTER) et taper l'expression $f(x)$, puis indiquer la variable (x) .



On peut donner la forme factorisée :

(CLEAR) sur la ligne de calcul, puis (F2) **2:factor(** (ENTER) ; se déplacer avec le curseur sur la dérivée calculée et (ENTER) ( )) (ENTER) .



Applications : Reprendre les fonctions de l'exercice 98, calculer leurs dérivées et en donner une forme factorisée.

2. UTILISATION D'UN LOGICIEL

100 Études conjointes des fonctions de coûts

On désire visualiser le comportement du coût marginal et du coût moyen par lecture sur la courbe de coût total grâce au logiciel Geoplan.

1° Travail sur papier

Soit $C(q) = q^3 - 6q^2 + 10q + 100$
le coût total de production pour une quantité $q \in [0\,;8]$, et le coût $C(q)$ en k€.

a) Donner les coûts fixes.

b) Calculer le coût marginal $C_m(q)$, assimilé à la dérivée du coût total.
En quelle quantité le coût marginal est-il minimal ?

c) Préciser le signe du coût marginal.
En déduire le sens de variation du coût total.

d) Exprimer le coût moyen $C_M(q)$ en fonction de q .

Guesmi.B

2° Représentation dans deux repères différents

a) Courbe de coût total dans un repère R

Créer / Repère et valider l'écran ci-dessous :

Repère	
Origine:	O
Premier vecteur:	vec(i)
Deuxième vecteur:	(1/50)*vec(j)
Pas de graduation (1er axe):	1
Pas de graduation (2ème axe):	50
Nom du repère:	R

Créer / Numérique / Fonction numérique / à 1 variable

Nom de la variable muette:	q
Expression de la fonction:	
q^3-6q^2+40q+100	
Nom de la fonction:	C

Créer / Ligne / Courbe / Graphe d'une fonction déjà créée

dans Repère: R Nom de la fonction : C

Bornes : 0 8 Nombre de points : 800 Nom de la courbe : Ct .

b) Courbe du coût moyen dans le repère R′

Créer un point *O* (0 ; – 14) et le repère R′ d'origine *O* .

Premier vecteur:	vec(i)
Deuxième vecteur:	(1/10)*vec(j)
Pas de graduation (1er axe):	1
Pas de graduation (2ème axe):	10

Utiliser les fonctionnalités du logiciel pour créer la fonction de coût moyen, CM , et sa courbe Cmoy dans le repère R′ (voir les objets créés ci-dessous).

c) Courbe de coût marginal dans le repère R′

En utilisant les fonctionnalités du logiciel, créer la fonction de coût marginal Cm et sa courbe Cmar dans le repère R′ .

couts : Objets de la figure

----- OBJETS CRÉÉS -----

R repère $(o, \vec{i}, \frac{1}{50}\vec{j})$ (graduations: 1,50)

C fonction: $q \mapsto q^3 - 6q^2 + 40q + 100$

C_t graphe de C sur [0,8] (800 points, repère R)

O point de coordonnées (0,-14) dans le repère R_{oxy}

R' repère $(O, \vec{i}, \frac{1}{10}\vec{j})$ (graduations: 1,10)

C_M fonction: $q \mapsto \frac{C(q)}{q}$

C_{moy} graphe de C_M sur [1,8] (800 points, repère R')

C_m fonction: $q \mapsto 3q^2 - 12q + 40$

C_{mar} graphe de C_m sur [0,8] (800 points, repère R')

q réel libre de [0,8]

M point de coordonnées (q,C(q)) dans le repère R

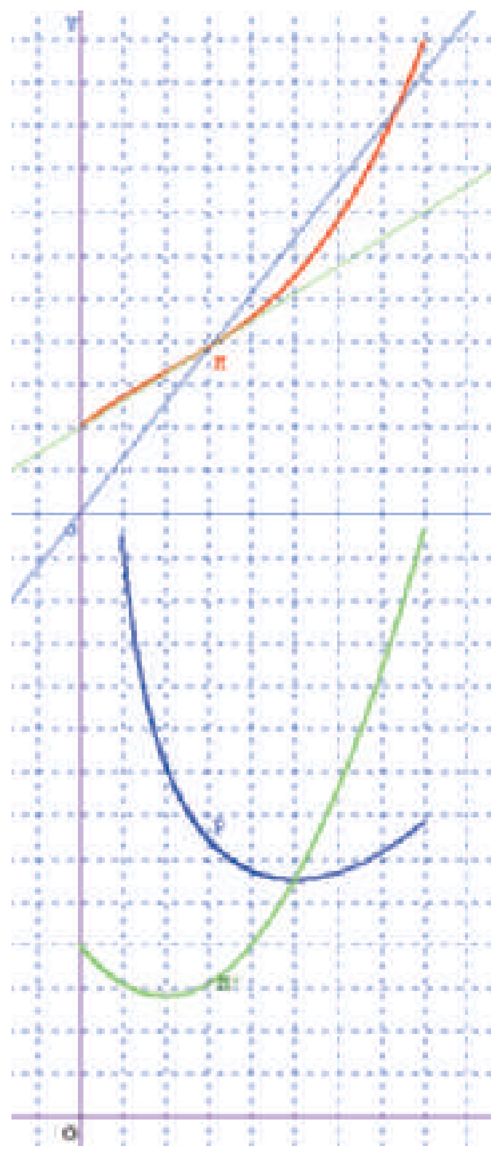
Droite (oM)

P point de coordonnées $(q, C_M(q))$ dans le repère R'

M' point de coordonnées $(q, C_m(q))$ dans le repère R'

T point de coordonnées (q+0.001,C(q+0.001)) dans le repère R

Droite (MT)



Guesmi.B

3° Visualisation des propriétés conjointes des courbes

a) Créer la variable q libre dans l'intervalle $[0 ; 8]$, puis le point M de la courbe Ct d'abscisse q dans le repère R ; et dans le repère R', créer le point P de la courbe $Cmoy$ et le point M' de $Cmar$ de même abscisse q.

b) Dans le repère R, créer la droite (OM), le point T de la courbe Ct d'abscisse $q + 0{,}001$, proche de M, et la sécante (MT) qui approche la tangente en M à la courbe Ct.

c) Piloter au clavier le réel q. Visualiser le déplacement des points sur les courbes.

En quelle valeur de q les points P et M' sont-ils confondus ? Que se passe-t-il dans le repère R sur la courbe de coût total ?

Quelle propriété peut-on énoncer concernant le coût moyen et le coût marginal pour cette quantité ?

101 Pourcentages d'évolution successifs : approximation affine

Une valeur V_0 subit plusieurs évolutions successives de même pourcentage d'évolution t %.

1° Travail sur papier

a) Exprimer la valeur obtenue après deux évolutions successives, à l'aide de t.

b) Quel sera le pourcentage global d'évolution après deux hausses de 0,5 % ? après deux hausses de 10 % ?

Dans ces deux cas, comparer le pourcentage d'évolution global t' et le double du taux $2t$.

2° Calcul du pourcentage d'évolution global après n évolutions successives identiques de t %

a) Préparer le tableau suivant :

	A	B	C	D	E	F
1	nombre de hausses		n	5		
2	taux t	(1 + t/100)^n	% global réel t'	1 + n*t/100	% global simple nt	erreur

b) En cellules A3 et A4, entrer les valeurs des pourcentages :

	A
1	nombre
2	taux t
3	0
4	0,5

Sélectionner les deux cellules A4 et A5, saisir la poignée de recopie **+** et « tirer » vers le bas jusqu'à $t = 10$, en cellule A23.

c) En cellules B3, C3, D3, E3 et F3, taper les formules suivantes :

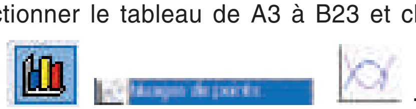
	A	B	C	D	E	F
1	nombre de hausses		n	5		
2	taux t	(1 + t/100)^n	% global réel t'	1 + n*t/100	% global simple nt	erreur
3	0	=(1+A3/100)^D1	=(B3-1)*100	=1+D1*A3/100	=(D3-1)*100	=B3-D3

Remarque : La référence B1 est absolue, elle est « bloquée » et conserve la même valeur quand on tire la poignée de recopie vers le bas. Pour obtenir cette notation, appuyer sur la touche F4 quand le curseur est sur B1 ou juste après.

Sélectionner l'ensemble des cellules B3, C3, D3, E3, F3, puis « tirer » vers le bas.

3° Comparaison des valeurs de $(1 + t/100)^n$ et des approximations $1 + n \times t/100$

a) Sélectionner le tableau de A3 à B23 et choisir


.

b) À partir de quel pourcentage d'évolution, l'erreur en colonne F est-elle supérieure à 0,01 ?

c) Augmenter la valeur de n en cellule D1 et pour chaque valeur de n, déterminer le pourcentage d'évolution à partir duquel l'erreur commise est supérieure à 0,01.

4° Applications

a) Dans un pays, une épidémie se propage rapidement.

Le nombre de malades augmente de 5 % par an. On peut lire dans un article : « Si des mesures sanitaires ne sont pas prises, dans 5 ans le quart de la population sera atteinte de la maladie ». Vérifier les affirmations du journaliste.

b) Jean-Louis hérite de 30 000 €. Il place cette somme sur un compte rémunéré au taux mensuel de 0,3 %. Il affirme que son argent est placé au taux annuel de 3,6 % et qu'il gagnera 1 080 € dans un an. Jean-Louis a-t-il raison ?

3. MODÉLISATION

Guesmi.B

102 **Toboggan : le bon raccordement**

Un toboggan gonflable doit être construit au bord d'un plan d'eau.
Par mesure de sécurité, ni creux ni aucune bosse ne doivent perturber la glissade des enfants qui l'utilisent.

La figure ci-contre représente une vue en coupe de ce toboggan.

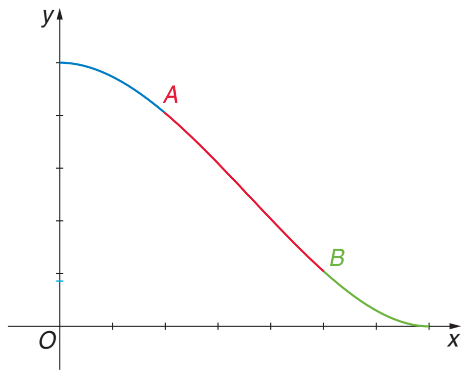
La hauteur est de 5 m, la longueur de 7 m.

La courbe représentant le toboggan admet une tangente horizontale au sommet ainsi qu'à l'arrivée sur le sol.

On modélise le toboggan à l'aide de deux arcs de paraboles :

sur $[0\,;2]$, $f(x) = -0{,}25x^2 + 5$,

sur $[5\,;7]$, $g(x) = 0{,}25\,(x-7)^2$,



et un segment de droite $[AB]$ qui raccorde les deux arcs de parabole.

Le but est de déterminer l'équation de la droite (AB) qui assurera le meilleur raccordement.

1° Travail sur papier

a) Construire les arcs de paraboles représentant les fonctions f et g.

Les fonctions f et g satisfont-elles aux conditions imposées par l'énoncé ?

b) Déterminer l'équation réduite de la droite passant par le point $A(2\,;4)$ et de coefficient directeur a.

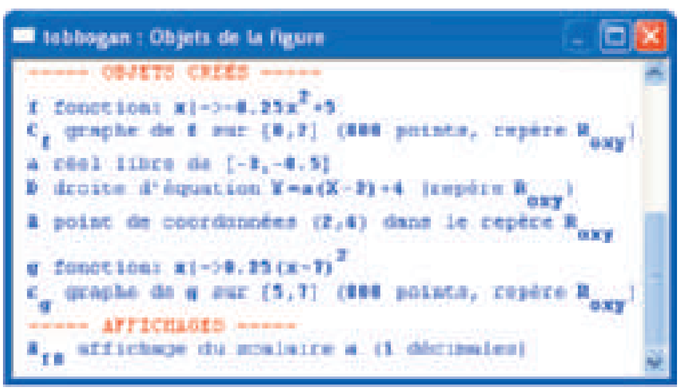
c) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f en A.

2° Recherche sur GEOPLAN du meilleur raccordement au point A

Créer les objets ci-contre sous Geoplan.

À l'aide des flèches du clavier, modifier le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$.

Pour quelles valeurs de a le raccordement en A semble-t-il convenable ?



3° Raccordement avec le second arc

Utiliser les flèches du clavier pour modifier le coefficient directeur de la droite afin d'obtenir un parfait raccordement de la droite avec les deux courbes.

Quelle est alors la valeur du coefficient directeur a ?

Un ballotin

103 La boîte a une base rectangulaire de largeur 6 cm. Elle se ferme par quatre rabats formant trois rectangles isométriques.

Soit x la longueur de la boîte, $x > 0$, et h sa hauteur en cm.

a) Déterminer le volume V de la boîte en fonction de h et x. Le volume doit être de 1 200 cm^3.
En déduire l'expression de h en fonction de x.

b) Montrer que l'aire totale de la boîte s'écrit :

$$A(x) = 24x + \frac{2\,400}{x} + 400.$$

c) Calculer la fonction dérivée A', étudier son signe sur $]0\,;+\infty[$.

d) En déduire les variations de A sur $]0\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variations.

e) Conclure pour le problème posé en donnant les dimensions de la droite.