Guesmi.B

DERIVABILITE
EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+4x-5$. Démontrer que f est dérivable en 3 et calculer $f'(3)$

Exercice n°2.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<0 \\ x-1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice n°3.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+3}$

a) Pour tout réel $h\neq 0$, démontrer que : $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\dfrac{h}{\sqrt{h^2+3}+\sqrt{3}}$

b) En déduire que f est dérivable en 0 et donner le nombre dérivé de f en 0.

Exercice n°4.

1) Etudier la dérivabilité en 0 de $x\mapsto x\sqrt{x}$

2) Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f

b) Etudier la dérivabilité de f en $+1$ et en -1

Exercice n°5.

1) f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x+\sqrt{x}$

a) Etudier la dérivabilité de f en 0

b) Dans un repère orthogonal, la courbe représentant f admet-elle une tangente au point d'abscisse 0 ?

2) g est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=x^2\sqrt{x}$

a) Etudier la dérivabilité de g en 0

b) Dans un repère orthogonal, la courbe représentant g admet-elle une tangente au point d'abscisse 0

Exercice n°6.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=|x^2-1|$

a) Donner, suivant la valeur de x, l'expression de $f(x)$

b) Etudier la dérivabilité de f en 1

Exercice n°7.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x^2-1|$

C est la courbe représentant f dans un repère orthonormal.

1) Tracer la courbe C. On note A le point de C d'abscisse 1.

2) a) Montrer que f est dérivable à droite en 1.

b) Déterminer une équation de la tangente à droite à la courbe C au point A. Tracer cette tangente.

3) a) Montrer que f est dérivable à gauche en 1.

b) Déterminer une équation de la tangente à gauche à la courbe C au point A. Tracer également cette tangente.

4) La fonction est-elle dérivable en 1 ?

Exercice n°8.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-1)|x-1|$

a) Dans un repère, tracer la courbe représentative C de f

b) Démontrer que la fonction f est dérivable en 1. Donner le nombre dérivé de f en 1

c) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1.

Exercice n°9.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

a) Pour tout réel h tel que $-1+h\neq 0$ et $h\neq 0$, exprimer en fonction de h le rapport $\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$

b) En déduire que f est dérivable en -1 et donner le nombre dérivé de f en -1

Exercice n°10.

En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer la limite des fonctions suivantes en a

1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ en $a=0$

2) $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x}$ en $a=0$

3) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ en $a=\dfrac{\pi}{2}$

4) $f(x)=\dfrac{\sin x-1}{\cos x}$ en $a=\dfrac{\pi}{2}$

DERIVABILITE - CORRECTION

Exercice n°1

Pour tout $h \neq 0$, on calcule : $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \dfrac{3(3+h)^2+4(3+h)-5-\left(3\times 3^2+4\times 3-5\right)}{h}$

$= \dfrac{3\left(9+6h+h^2\right)+12+4h-5-34}{h} = \dfrac{27+18h+3h^2+12+4h-5-34}{h} = \dfrac{3h^2+22h}{h} = 3h+22$

Puisque $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 3h+22 = 22$, on en conclut que f est dérivable en 3 et $f'(3)=22$

Exercice n°2

f est dérivable sur $]-\infty;0[$ en tant que fonction polynôme et sur $[0;+\infty[$ en tant que fonction affine.

Pour tout $x \in]-\infty;0[$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x^2-1-(-1)}{x} = x$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0)=0$. De plus, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x-1-(-1)}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=1$. Mais comme $f'_g(0)\neq f'_d(0)$, on conclut que $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0}$ **(Point anguleux)**

Exercice n°3

a) On met en œuvre la technique dite de la « multiplication par la quantité conjuguée » : Pour tout réel $h \neq 0$,

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h^2+3}-\sqrt{3}}{h} = \frac{\left(\sqrt{h^2+3}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{h^2+3}+\sqrt{3}\right)}{h\left(\sqrt{h^2+3}+\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{h^2+3}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{h\left(\sqrt{h^2+3}+\sqrt{3}\right)} = \frac{h^2+3-3}{h\left(\sqrt{h^2+3}+\sqrt{3}\right)} = \frac{h^2}{h\left(\sqrt{h^2+3}+\sqrt{3}\right)} = \frac{h}{\sqrt{h^2+3}+\sqrt{3}}$$

b) Puisque $\lim\limits_{h\to 0} h = 0$ et $\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{h^2+3} = \sqrt{3}$, on aura $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{\sqrt{h^2+3}+\sqrt{3}} = \dfrac{0}{2\sqrt{3}} = 0$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0)=0.}$

Exercice n°4

1) Pour tout $h \neq 0$, on calcule : $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{h\sqrt{h}-0}{h} = \dfrac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h}$

Puisque $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\sqrt{h} = 0$, on en conclut que f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$

2) a) f est définie pour toutes les valeurs de x pour lesquelles $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$, donc $\boxed{D_f = [-1;1]}$

b) Pour tout $x \in [-1;1[$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{(1-x)\sqrt{1-x^2}-0}{x-1} = -\sqrt{1-x^2}$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} -\sqrt{1-x^2} = 0$,

donc $\boxed{f \text{ est dérivable (à gauche) en 1 et } f'_g(1)=1}$.

De plus, pour tout $x \in]-1;1]$, $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \dfrac{(1-x)\sqrt{1-x^2}-0}{x+1} = \dfrac{(1-x)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{1+x} = \dfrac{(1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}(1-x)\sqrt{1-x} = 2\sqrt{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\sqrt{1+x} = 0^+$, on en conclut par quotient, que $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = +\infty$, donc que $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } -1}$ 4) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \left|x^2-1\right|$

Exercice n°5

1) a) Pour tout $x>0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{x+\sqrt{x}-0}{x}=1+\dfrac{\sqrt{x}}{x}=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\sqrt{x}=0^+$, on en déduit par limite du quotient, que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

La fonction *f* n'est donc pas dérivable en 0

b) Dans un repère orthogonal, la courbe représentant *f* admet en son point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

2) a) Pour tout $x>0$, $\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\dfrac{x^2\sqrt{x}-0}{x}=x\sqrt{x}$

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}x\sqrt{x}=0^+$, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}x\sqrt{x}=0$

La fonction *g* est donc dérivable en 0 et $g'(0)=0$

b) Dans un repère orthogonal, la courbe représentant *g* admet en son point d'abscisse 0 une demi-tangente horizontale.

Exercice n°6

a) Pour tout $x\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right[$, $x^2-1\geq 0$ donc $f(x)=\left|x^2-1\right|=x^2-1$

Pour tout $x\in[-1;1]$, $x^2-1\leq 0$ donc $f(x)=\left|x^2-1\right|=-\left(x^2-1\right)=1-x^2$

b) On détermine $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}x+1=2$

La fonction *f* est donc dérivable à droite en 1 et $f_d'(1)=2$

On détermine $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}\dfrac{-\left(x^2-1\right)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}\dfrac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}-(x+1)=-2$

La fonction *f* est donc dérivable à gauche en 1 et $f_g'(1)=-2$

Cependant, puisque $f_d'(1)\neq f_g'(1)$, *f* n'est pas dérivable en 1.

Exercice n°7

1) Pour tout $x\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right[$, $x^2-1\geq 0$ donc $f(x)=\left|x^2-1\right|=x^2-1$.

Pour tout $x\in[-1;1]$, $x^2-1\leq 0$ donc $f(x)=\left|x^2-1\right|=-\left(x^2-1\right)=1-x^2$.

La courbe représentative de *f* est donc constituée de l'union de deux courbes paraboles : celle de la fonction $x\to x^2-1$ pour $x\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right[$, et celle de la fonction $x\to 1-x^2$ pour $x\in[-1;1]$.

2) a) Pour tout *x*>1, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}x+1=2$, ce qui nous permet d'affirmer que *f* est dérivable à droite en 1 et que $f_d'(1)=2$

b) Une équation de la tangente à droite à la courbe *C* au point A est $y=f_d'(1)(x-1)+f(1)=2(x-1)+0$, c'est-à-dire $\boxed{y=2x-2}$

3) a) Pour tout *x*<1, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{-\left(x^2-1\right)}{x-1}=\dfrac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=-(x+1)$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}-(x+1)=-2$, ce qui nous permet d'affirmer que *f* est dérivable à gauche en 1 et que $f_g'(1)=-2$

b) Une équation de la tangente à gauche à la courbe *C* au point A est $y=f_g'(1)(x-1)+f(1)=-2(x-1)+0$, c'est-à-dire $\boxed{y=-2x+2}$

4) La fonction *f* n'est pas dérivable en 1 car $f_g'(1)\neq f_d'(1)$

Les tangentes à droite et à gauche en A étant différentes, on dit que A est un point anguleux.

Exercice n°8

a) Pour tout $x \geq 1 \Leftrightarrow x-1 \geq 0$, $|x-1| = x-1$ donc $f(x) = (x-1)(x-1) = (x-1)^2$

Pour tout $x \leq 1 \Leftrightarrow x-1 \leq 0$, $|x-1| = -(x-1)$ donc $f(x) = (x-1)\times(-(x-1)) = -(x-1)^2$

b) Pour tout $x>1$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{(x-1)^2-0}{x-1} = x-1$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x-1 = 0$.

La fonction f est donc dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = 0$

De plus, pour tout $x<1$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{-(x-1)^2-0}{x-1} = -(x-1)$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} -(x-1) = 0$.

La fonction f est donc dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = 0$

Puisque $f'_d(1) = f'_g(1) = 0$, on conclut que $\boxed{f \text{ est dérivable en 1 et } f'(1) = 0}$

c) L'équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1 est de la forme $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, c'est-à-dire $\boxed{y = 0}$. Il s'agit donc de l'axe des abscisses

Exercice n°9

a) Pour tout réel h tel que $-1+h \neq 0$ et $h \neq 0$,

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{\frac{1}{(-1+h)^2} - \frac{1}{(-1)^2}}{h} = \frac{\frac{1}{(-1+h)^2} - \frac{(-1+h)^2}{(-1+h)^2}}{h}$$

$$= \left(\frac{1}{(-1+h)^2} - \frac{1-2h+h^2}{(-1+h)^2}\right)\times\frac{1}{h} = \frac{2h-h^2}{(-1+h)^2}\times\frac{1}{h} = \frac{2-h}{(-1+h)^2}$$

b) Puisque $\lim\limits_{h\to 0} 2-h = 2$ et $\lim\limits_{h\to 0} -1+h = -1$ donc $\lim\limits_{h\to 0} (-1+h)^2 = 1$, on en déduit, par application des règles sur le quotient, que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2-h}{(-1+h)^2} = 2$, donc que $\boxed{f \text{ est dérivable en } -1 \text{ et que le nombre dérivé de } f \text{ en } -1 \text{ vaut } 2}$

Exercice n°10

1) Si on pose $g(x) = \sin x$, alors $g(0) = \sin 0 = 0$, et ainsi, pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

La fonction g étant dérivable en 0, le quotient $f(x) = \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ admet donc une limite finie en 0 égale à $g'(0)$.

Or, pour tout réel x, $g'(x) = \cos x$ donc $g'(0) = 1$, et on conclut que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1}$

2) Si on pose $g(x) = \cos x$, alors $g(0) = \cos 0 = 1$, et ainsi, pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x} = \frac{\cos x - \cos 0}{x-0} = \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

La fonction g étant dérivable en 0, le quotient $f(x) = \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ admet donc une limite finie en 0 égale à $g'(0)$.

Or, pour tout réel x, $g'(x) = -\sin x$ donc $g'(0) = -\sin 0 = 0$, et on conclut que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0}$

3) Si on pose $g(x)=\cos x$, alors $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, et ainsi, pour tout $x\neq\frac{\pi}{2}$,

$$f(x)=\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{\cos x-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$$

La fonction g étant dérivable en $\frac{\pi}{2}$, le quotient $f(x)=\dfrac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$ admet donc une limite finie en $\frac{\pi}{2}$ égale à $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Or, pour tout réel x, $g'(x)=-\sin x$ donc $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$, et on conclut que $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=-1}$

d) Pour trouver cette limite, il faut « séparer » en deux la fraction

Pour tout $x\neq\frac{\pi}{2}$, $f(x)=\dfrac{\sin x-1}{\cos x}=\dfrac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}\times\dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}$

On doit étudier séparément l'existence des deux limites $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}$

Si on pose $g(x)=\sin x$, alors $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, et ainsi, pour tout $x\neq\frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

tandis que la deuxième limite $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}$ est l'inverse de celle trouvée dans la question c), donc vaut -1

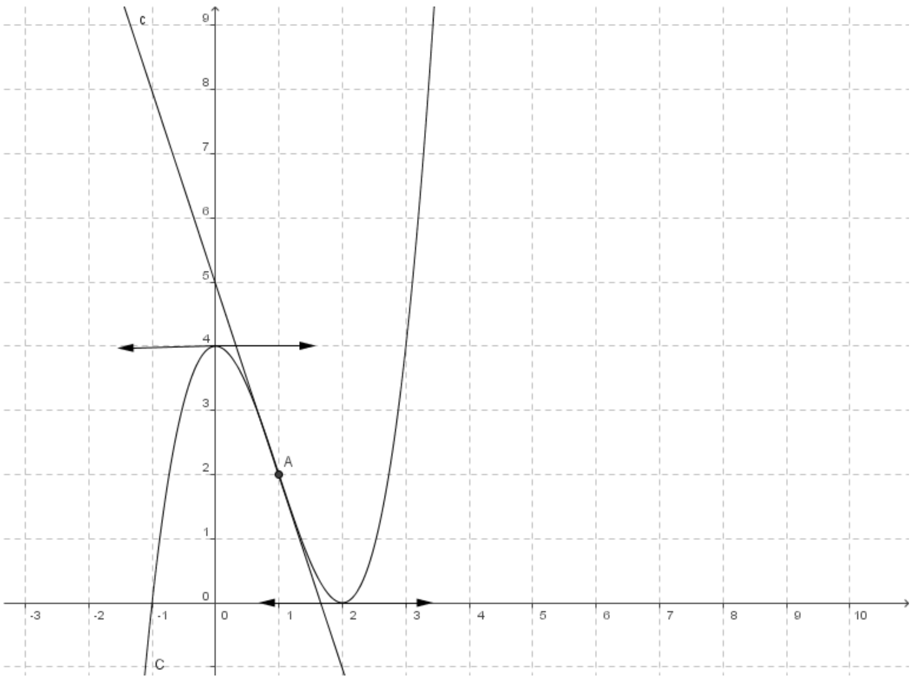
Par produit des limites, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}\times\dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}=0\times(-1)=0$, et ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{\cos x}=0}$

Nombre dérivé-Fonction dérivée

Guesm.B

Exercice n°1:

Soit la fonction f définie et dérivable sur IR et donnée par sa représentation graphique (Voir figure).



La droite (D) est la tangente à (C) en A .

1) Par une lecture graphique, répondre aux questions suivantes:

a) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) Calculer, $f'(0)$,$f'(2)$ et $f'(1)$

c) Dresser le tableau de variation de f .

d) Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solution de l'équation $f(x)$ =m .

2) On admet que $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$. Déterminer les réels a , b et c.

3) Soit g la fonction définie par: $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x + 1$

a) Vérifie que $g'(x) = f(x)$

b) Déduire le tableau de variation de g .

Exercice n°2:

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-2x} & si \quad x \geq 2 \\ \dfrac{x^2-4}{x^2+1} & si \quad x < 2 \end{cases}$

On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé ($O;\vec{i};\vec{j}$) .

1) Montrer que f est continue en 2.

2) Etudier la dérivabilité de f en 2.interpréter graphiquement les résultats.

3) Etudier les variations de f sur et dresser son tableau de variation.

4) Montrer que la tangente à (ζ) au point d'abscisse 1 est parallèle à la droite, (D) : $y = \dfrac{5}{2}x$ -2.

Exercices 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+2x} & si \;\; x \geq 0 \\ \dfrac{x^3}{(x+1)^2} & si \quad x < 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1)a)Etudier la continuité de f en 0.

b) En déduire que f est continue sur ℝ.

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0.Interpréter graphiquement les résultats obtenu.

b) Montrer que f est dérivable à gauche de 0.

Ecrire une équation de la demi-tangente à (C) à gauche de 0.

3) Montrer que (D):y= x +1 est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

4) a) Montrer que si $x < 0$, on a : $f(x) = x + a + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}$,avec a , b et c trois réels à déterminer.

b) En déduire que la droite (Δ): $y = x - 2$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$.

c) Etudier la position relative de (C) et (Δ).

5) Etudier les variations de f sur IR et dresser son tableau de variation.

6) Tracer (C); (D) et (Δ).

Guesmi.B

Exercice 1 $f_1(x)=\frac{1}{4}\cdot x^2-3$ et $f_2(x)=\frac{1}{x}-x$

1.1 Référez-vous au graphique de gauche ci-dessous.

1.2 $f_1(x)=0,25\cdot x^2-3$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{0,25\cdot x^2-3-(0,25\cdot a^2-3)}{x-a}=$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{0,25\cdot\left(x^2-a^2\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{0,25\cdot(x-a)\cdot(x+a)}{x-a}=\lim_{x\to a}0,25\cdot(x+a)=0,5\cdot a$$

Donc, pour $a=2$, $f(a)=f(2)=0,25\cdot 2^2-3=-2$ et $f'(a)=f'(2)=1$.

Et, pour $a=-4$, $f(a)=f(-4)=0,25\cdot(-4)^2-3=1$ et $f'(a)=f'(-4)=-2$.

1.3 L'équation de la tangente à la courbe d'équation $y=f(x)$ au point d'abscisse a est :

$T_a(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$

Ainsi : $\boxed{T_2(x)=-2+1\cdot(x-2)=x-4}$, qui correspond bien au graphique.

De même, $\boxed{T_4(x)=1+(-2)\cdot(x+4)=-2x-7}$

1.3 Référez-vous au graphique de droite ci-dessous.

1.4 $f_2(x)=\frac{1}{x}-x$, $f_2'(x)=\left(\frac{1}{x}-x\right)'=-\frac{1}{x^2}-1$

Donc, pour $a=2$, $f(a)=f(2)=0,5-2=-1,5$ et $f'(a)=f'(2)=-0,25-1=-1,25$.

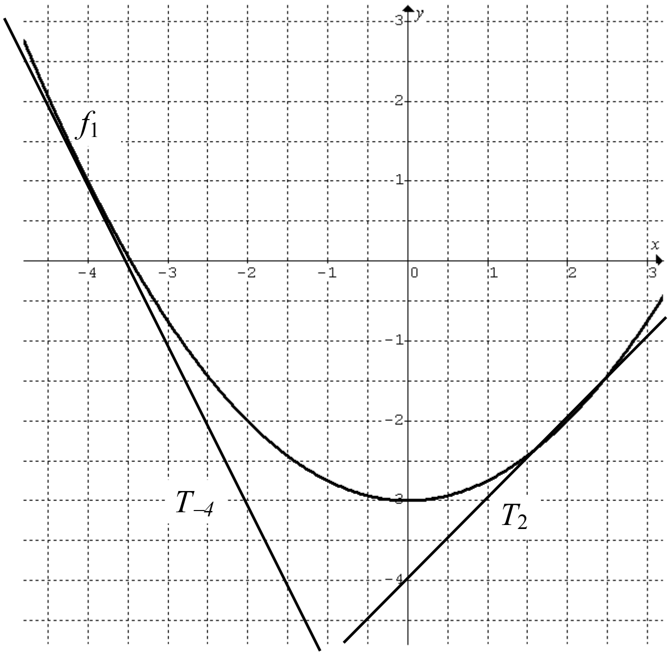
Et, pour $a=-3$, $f_2(-3)=-\frac{1}{3}-(-3)=\frac{8}{3}\approx 2,667$ et $f'(-3)=-\frac{1}{9}-1=-\frac{10}{9}\approx-1,1111$.

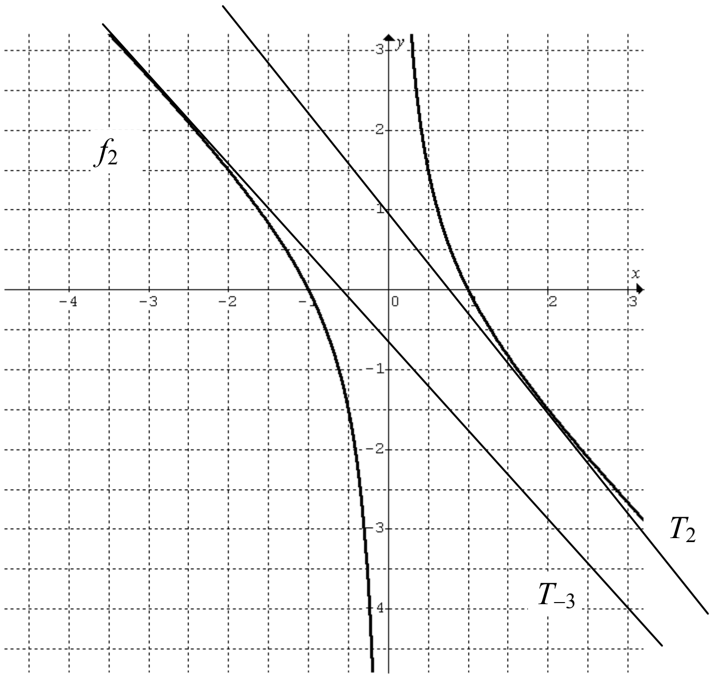
1.6 L'équation de la tangente à la courbe d'équation $y=f(x)$ au point d'abscisse a est :

$T_a(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$

Ainsi : $\boxed{T_2(x)=-1,5-1,25\cdot(x-2)=-1,25\cdot x+1}$, qui correspond bien au graphique.

De même, $\boxed{T_{-3}(x)=\frac{8}{3}-\frac{10}{9}\cdot(x+3)=-\frac{10}{9}\cdot x-\frac{2}{3}}$





1.7* Etonnamment, il n'existe aucune tangente à la fonction f_2 en deux points. Cela peut se voir en remarquant que la droite $y=-x$ est une asymptote qui sépare les deux courbes, qui n'ont jamais une tangente moins oblique que la droite $y=-x$. $\left(f_2'(a)<-1\right.$ pour tout $\left.a\in\mathbb{R}.\right)$

Exercice 2

La tangente à la courbe est horizontale $\Leftrightarrow$ sa pente est nulle $\Leftrightarrow$ la dérivée de la fonction s'annule.

2.1 $f(x)=x^2-2x+1,5$; $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^2-2x+1,5)-(x^2-2x+1,5)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2-2x+2a}{x-a}=$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)\cdot(x+a)-2\cdot(x-a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)\cdot[(x+a)-2]}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(x+a)-2=2a-2$

$f'(a)=2a-2$; $f'(a)=0 \Leftrightarrow 2a-2=0 \Rightarrow a=1$

La tangente à la courbe de f est horizontale en $P=(1\,;f(1))=(1\,;0,5)$.

Equation de la tangente : $y=0,5$

2.2 $f(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x$; $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\left(x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x\right)-\left(a^3-\dfrac{9}{2}a^2+6a\right)}{x-a}=$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3-\dfrac{9}{2}x^2+\dfrac{9}{2}a^2+6x-6a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)\cdot(x^2+ax+a^2)-\dfrac{9}{2}\cdot(x-a)\cdot(x+a)+6\cdot(x-a)}{x-a}=$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)\cdot\left[(x^2+ax+a^2)-\dfrac{9}{2}\cdot(x+a)+6\right]}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(x^2+ax+a^2)-\dfrac{9}{2}\cdot(x+a)+6=3a^2-9a+6$

$f'(a)=0 \Leftrightarrow 3a^2-9a+6=0 \Leftrightarrow 3\cdot(a-2)\cdot(a-1)=0 \Rightarrow a=1$ ou $a=2$

La tangente à la courbe de f est horizontale en $P_1=(1\,;\,f(1))=(1\,;2,5)$ et en $P_2=(2\,;\,f(2))=(2\,;2)$.

Equations respectives de ces tangentes : $y=2,5$ et $y=2$

2.3 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$; $f'(a)=1-\dfrac{1}{a^2}$ on a utilisé la dérivée de chaque terme, chacune vue au cours !

$f'(a)=0 \Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{a^2}=0 \Rightarrow a=-1$ ou $a=1$

La tangente à la courbe de f est horizontale en $P_1=(-1\,;f(-1))=(-1\,;-2)$ et en $P_2=(1\,;f(1))=(1\,;2)$

Equations respectives de ces tangentes : $y=-2$ et $y=2$

Exercice 3

3.1 Soit $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x$. La question revient à déterminer pour quelle(s) valeur(s) de α et β la dérivée de la fonction f s'annule en $x=1$ et la fonction égale 2 en $x=1$.

$f'(x)=3\cdot x^2+\alpha\cdot 2\cdot x+\beta$. Ceci mène au système d'équations :

$\begin{cases} f'(1)=0 \\ f(1)=2 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} 3\cdot 1^3+\alpha\cdot 2\cdot 1+\beta = 0 \\ 1^3+\alpha\cdot 1^2+\beta\cdot 1=2 \end{cases}$ simplifié en : $\begin{cases} 2\alpha+\beta=-3 \\ \alpha+\beta=1 \end{cases}$

En soustrayant les deux équations, on élimine l'inconnue β et on obtient : $\alpha=-4$.

Donc $\beta=1-\alpha=5$.

Donc la fonction cherchée est : $f(x)=x^3-4x^2+5x$

Guesmi.B

Suite de l'exercice 3.

3.2 Soit $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x$. On cherche α et β pour que $T_{-1}(x) = x + 4$.

$f'(x) = 3x^2 + \alpha \cdot 2 \cdot x + \beta$.

On sait que $f(-1) = T_{-1}(-1) = 3$, donc $-1 + \alpha - \beta = 3$.

On sait que $f'(-1)$ égale le facteur de x, donc $f'(-1) = 1$, donc $3 - 2\alpha + \beta = 1$.

Ceci mène au système d'équations :

$$\begin{cases} a - b = 4 \\ -2a + b = -2 \end{cases}$$

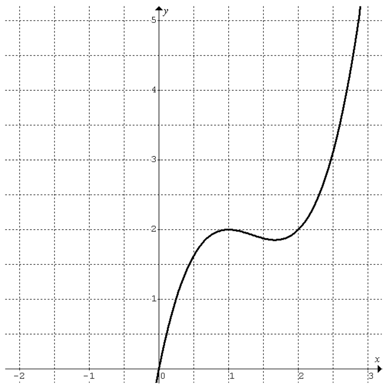
En additionnant les deux équations, on élimine l'inconnue β et on obtient : $-\alpha = 2$.

Donc $\alpha = -2$ et $\beta = \alpha - 4 = -6$

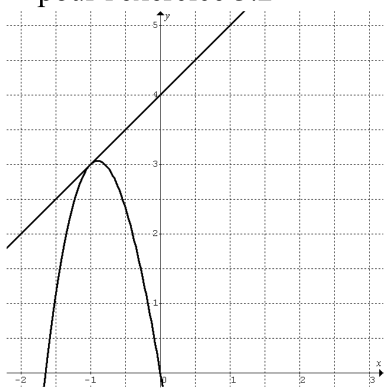
$\alpha = -2$ et $\beta = -6$ sont les valeurs cherchées. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 6x$

Vérifications sur des graphiques :

Pour l'exercice 3.1



pour l'exercice 3.2



3.3 Pour que deux fonctions aient des tangentes en une même abscisse a qui soient parallèles, il faut que la dérivée de ces fonctions en cette abscisse a soit la même.

$$f'(a) = g'(a) \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot \frac{-2}{a^3} = -\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{8}{a^3} = -\frac{a}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 16 = a^4 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 2$$

f et g ont des tangentes parallèles aux points d'abscisses $x = -2$ et $x = 2$. Ce sont les seules solutions.

Supplément : **Exercice 4**

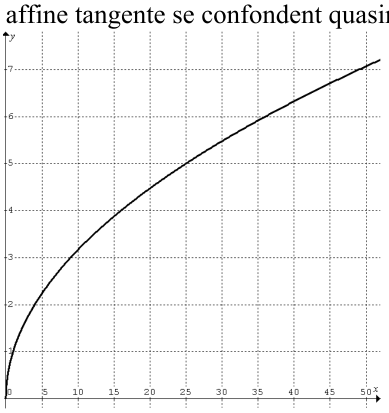
Le but est de remarquer qu'il est facile de calculer une bonne approximation de $\sqrt{50}$ à l'aide de la dérivée de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.

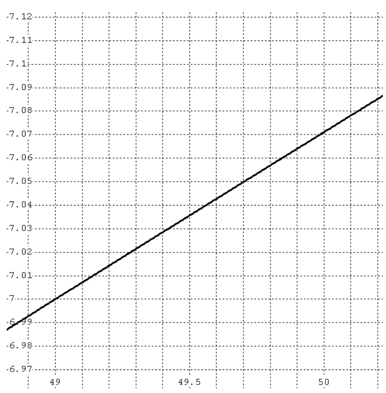
4.1 Calculez la dérivée de cette fonction en $a = 49$.

4.2 Ecrivez l'équation de l'application affine tangente à f en $a = 49$.

4.3 Remarquez que $\sqrt{50} \approx \sqrt{49} + \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{49}} \cdot (50 - 49)$ et calculez la précision de cette approximation.

Pour information, le graphique de gauche ci-dessous est celui de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ et celui de droite est un agrandissement de cette fonction autour des valeurs qui nous intéresses. Remarquez que la fonction f et sont application affine tangente se confondent quasiment sur l'agrandissement.





Correction de l'exercice supplémentaire n° 4.

4.1 $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad f(49)=\sqrt{49}=7$ $\quad f'(x)=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$ $\quad f'(49)=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{49}}=\dfrac{1}{14}\approx 0{,}0714$

4.2 L'application affine tangente à f en $a=49$ est $y=7+\dfrac{1}{14}\cdot(x-49)$

4.3 La fonction et son application affine tangente en $a=49$ sont presque égales autour de $a=49$, donc $\sqrt{50}=f(50)\approx f(49)+f'(49)\cdot(x-49)=7+\dfrac{1}{14}\cdot(50-49)\approx 7{,}0714$.

Comparé au calcul de la calculatrice $\sqrt{50}=7{,}07107...$, on voit que les 4 premiers chiffres sont identiques.

Guesmi.B

Exercices corrigés sur la dérivation dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 : déterminer le nombre dérivé d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$.

1. En utilisant la définition du nombre dérivé, montrer que f est dérivable en 1 et déterminer $f'(1)$.
2. Vérifier le résultat sur la calculatrice.

Solution :

1. Pour tout réel h non nul,n le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$ est :

$$\tau(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 + (1+h) - (1^2+1)}{h} = \frac{3h + h^2}{h} = 3 + h$$

Or, $\lim\limits_{h \to 0}(3+h) = 3$. Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 3$.

Pour trouver la limite de $\tau(h)$ lorsque h tend vers 0, on peut souvent remplacer h par 0 après avoir simplifié l'expression (plus de h au dénominateur).

2.

TI	Casio
Appuyer sur la touche $\boxed{\texttt{MATH}}$ puis $\boxed{8}$ (nbreDérivé) : nbreDérivé $= (X^2 + X, X, 1)$	En mode RUN-MATH, utiliser les instructions $\boxed{\texttt{F4}}$ (MATH) puis $\boxed{\texttt{F4}}$ (d/dx) : $\dfrac{d}{dx}(X^2 + X, 1)$

Exercice 2 : la même chose, plein de fois

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le nombre dérivé en a (en utilisant la définition) :

1. $f_1(x) = 5x - 3$ et $a = 1$
2. $f_2(x) = 3x^2 + 2x - 1$ et $a = 2$
3. $f_3(x) = \sqrt{x+3}$ et $a = -1$
4. $f_4(x) = \dfrac{x}{x+1}$ et $a = -2$

Solution :

1. Pour tout $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f_1 entre 1 et $1+h$ est : $\tau_1(h) = \dfrac{f_1(1+h) - f_1(1)}{h}$ (*)
$(*) \Leftrightarrow \tau_1(h) = \dfrac{5(1+h) - 3 - (5 \times 1 - 3)}{h}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_1(h) = \dfrac{5h}{h}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_1(h) = 5$
Or, $\lim\limits_{h \to 0} 5 = 5$, donc f_1 est dérivable en $a = 1$ et $f_1'(1) = 5$.

2. Pour tout $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f_2 entre 2 et $2+h$ est : $\tau_2(h) = \dfrac{f_2(2+h) - f_2(2)}{h}$ (*)
$(*) \Leftrightarrow \tau_2(h) = \dfrac{3(2+h)^2 + 2(2+h) - 1 - (3 \times 2^2 + 2 \times 2 - 1)}{h}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_2(h) = \dfrac{3h^2 + 14h}{h}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_2(h) = 3h + 14$
Or, $\lim\limits_{h \to 0} 3h + 14 = 14$, donc f_2 est dérivable en $a = 2$ et $f_2'(2) = 14$.

3. Pour tout $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f_3 entre -1 et $-1+h$ est : $\tau_3(h) = \dfrac{f_3(-1+h) - f_3(-1)}{h}$ (*)
$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \dfrac{\sqrt{(-1+h)+3} - \sqrt{-1+3}}{h}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \dfrac{\left(\sqrt{2+h} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)}{h \times \left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)}$

$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \dfrac{2+h-2}{h \times (\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \dfrac{h}{h \times (\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \dfrac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}$
Or, $\lim\limits_{h\to 0} \sqrt{2+h}+\sqrt{2} = \sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, donc $\lim\limits_{h\to 0} \tau_3(h) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
Par conséquent, f_3 est dérivable en $a=-1$ et $f_3'(-1) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

4. Pour tout $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f_4 entre -2 et $-2+h$ est : $\tau_4(h) = \dfrac{f_4(-2+h)-f_4(-2)}{h}$ (*)
$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{\dfrac{-2+h}{-2+h+1} - \dfrac{-2}{-2+1}}{h}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{\dfrac{-2+h}{h-1} - \dfrac{-2}{-1}}{h}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{\dfrac{-2+h}{h-1} - \dfrac{-2}{-1}}{h}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{1}{h} \times \dfrac{-2+h}{h-1} - \dfrac{2(h-1)}{h-1}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{1}{h} \times \dfrac{-h}{h-1}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{-1}{h-1}$
Or, $\lim\limits_{h\to 0} h-1 = -1$, donc $\lim\limits_{h\to 0} \tau_4(h) = \dfrac{-1}{-1} = 1$.
Par conséquent, f_4 est dérivable en $a=-2$ et $f_4'(-2) = 1$.

Exercice 3 : tangente par le nombre dérivé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - x$.

1. Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
2. Vérifier le résultat sur calculatrice.

Solution :

1. Afin de déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1, déterminons tout d'abord si f est dérivable en 1.
   - Méthode 1 : Calculons la limite du taux d'accroissement τ de f entre 1 et $1+h$. Pour tout $h \neq 0$:

$$\tau(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{2(1+h)^2-(1+h)-(2\times 1^1 - 1)}{h} = \frac{2h^2+3h}{h} = 2h+3$$

   Or, $\lim\limits_{h\to 0}(2h+3) = 3$, donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 3$.
   - Méthode 2 : La fonction f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition et, pour tou x réel, on a

$$f'(x) = 2\times 2x - 1 = 4x - 1$$

   En particulier, f est dérivable en 1 et $f'(1) = 4\times 1 - 1 = 3$.

   Nous avons donc montré que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 3$. Par conséquent, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente non verticale, de coefficient directeur $f'(1) = 3$. Donc $(\mathcal{T})$ a une équation de la forme : $y = 3x + p$.
   Or, $A(1\ ;\ f(1)) \in (\mathcal{T})$, donc $y_A = 3x_A + p$ $(*)$.
   $(*) \Leftrightarrow f(1) = 3\times 1 + p$
   $(*) \Leftrightarrow 2\times 1^2 - 1 = 3 + p$
   $(*) \Leftrightarrow 1 - 3 = p$
   $(*) \Leftrightarrow p = -2$
   La tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathcal{C}_f$ au point $A(1\ ;\ f(1))$ a donc pour équation $y = 3x - 2$.

<table>
<tr><th>TI</th><th>Casio</th></tr>
<tr><td>(a) Saisir l'expression de $f(x)$ en Y1
(b) Appuyer sur la touche graphe et choisir l'instruction dessin (2nde PRGM) puis 5 (Tangente)
(c) Régler la fenêtre d'affichage
(d) Préciser la valeur de x en appuyant sur 1. Valider par ENTER. La tangente s'affiche ainsi qu'une équation (éventuellement approchée).</td><td>(a) Choisir l'instruction SET UP (SHIFT MENU). Activer le mode Derivative : choisir ON (F1), suivi de EXE
(b) Saisir la fonction en Y1 et tracer la courbe
(c) Choisir l'instruction Sketch (SHIFT F4). Sélectionner Tang (F2)
(d) Appuyer sur 1 pour sélectionner la valeur de x, puis taper deux fois sur la touche EXE. La tangente s'affiche ainsi qu'une équation (éventuellement approchée).</td></tr>
</table>

Exercice 4 : Calculer des nombres dérivés à l'aide des formules

Pour les fonctions suivantes, déterminer le nombre dérivé en $x = 2$ puis en $x = \dfrac{1}{2}$:

1. $f(x) = x^2$
2. $g(x) = x^3$
3. $h(x) = \dfrac{1}{x}$
4. $i(x) = x^5$
5. $j(x) = \sqrt{x}$

Solution :

1. La fonction f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a :
$$f'(x) = 2x$$
Par conséquent, $f'(2) = 2 \times 2 = 4$ et $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 \times \dfrac{1}{2} = 1$.
2. La fonction g est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, on a :
$$g'(x) = 3x^2$$
Par conséquent, $g'(2) = 3 \times 2 = 6$ et $g'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.
3. La fonction h est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout $x \in \mathcal{D}_h$, on a :
$$h'(x) = -\frac{1}{x^2}$$
Par conséquent, $h'(2) = -\dfrac{1}{2^2} = -\dfrac{1}{4}$ et $h'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = -4$.
4. La fonction i est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout $x \in \mathcal{D}_i$, on a :
$$i'(x) = 5x^4$$
Par conséquent, $i'(2) = 5 \times 2^4 = 80$ et $i'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 5 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{5}{16}$.

5. La fonction j est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. Pour tout $x>0$, on a :
$$j'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
Guesmi.B

Par conséquent, $j'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ et $i'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 5 : Tangente en utilisant les formules de dérivation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
2. Existe-t-il une tangente à $\mathcal{C}_f$ parallèle à la droite (d) d'équation$y=3x-4$?
   Si oui, déterminer les coordonnées du point de contact.

Solution :

1. La fonction f est une fon,ction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f'(x)=2x$.
   Par conséquent, la tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1 a pour coefficient directeur $f'(1)=2$. Son équation est donc
   $$y=2x+p \text{ avec } p\in\mathbb{R}$$
   De plus, $A(1\ ;\ f(1))\in(\mathcal{T})$, donc $y_A=2x_A+p$, c'est-à-dire $f(1)=2\times 1+p$, d'où $p=1-2=-1$.
   Donc
   $$(\mathcal{T})\ :\ y=2x-1$$
2. La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x est $f'(x)=2x$.
   S'il existe une tangente parallèle à la droite (d) alors son coefficient directeur est le même que (d), c'est-à-dire 3. On cherche donc un réel x tel que
   $$f'(x)=3\ (*)$$
   $(*)\Leftrightarrow 2x=3$
   $(*)\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$
   Donc $\mathcal{C}_f$ admet une tangente parallèle à (d) au point $M\left(\frac{3}{2}\ ;\ f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ soit $M\left(\frac{3}{2}\ ;\ \frac{9}{4}\right)$.

Exercice 6 : encore une tangente avec un joli calcul de dérivée

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{2x-3}{x^2+1}$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
3. Vérifier le résultat sur calculatrice.

Solution :

1. Pour tout réel x, $x^2+1\neq 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x)=2x-3$ et $v(x)=x^2+1$.
   Les fonction su et v sont des fonctions polynômes, elles sont donc dérivables sur leur ensemble de définition $\mathbb{R}$. On a alors, pour tout réel x :
   $u'(x)=2$ et $v'(x)=2x$.
   De plus, la fonction v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :
   $$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{v^2(x)}=\frac{2(x^2+1)-(2x-3)\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+6x+2}{(x^2+1)^2}$$
   La fonction f est donc dérivable en $a=1$ et $f'(1)=\frac{-2\times 1^2+6\times 1+2}{(1^2+1)^2}=\frac{3}{2}$.
   Le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1 est donc $f'(1)=\frac{3}{2}$.
   Donc $\mathcal{T}$ a pour équation $y=\frac{3}{2}x+p$ où $p\in\mathbb{R}$.
   De plus, $A(1;\ f(1))\in\mathcal{T}$, donc $y_A=\frac{3}{2}x_A+p$, soit $\frac{-1}{2}=\frac{3}{2}+p$, donc $p=-2$.
   D'où
   $$\mathcal{T}\ :\ y=\frac{3}{2}x-2$$

3. Voir l'exercice sur la tangente via le nombre dérivé (exercice 3).

Exercice 7 : tangente sans l'expression de la fonction

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dérivable en 3. On sait que $f(3) = -2$ et $f'(3) = 0,5$.
Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3.

Solution :
La fonction f est dérivable en 3, donc la tangente (T) à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3 a pour équation $y = f'(3)x + p = 0,5x + p$, avec $p \in \mathbb{R}$.
Or, $f(3) = -2$, donc la tangente passe par le point $A(3\ ;\ -2)$. Par conséquent, $y_A = 0,5x_A + p$, soit $-2 = 0,5 \times 3 + p$, d'ù $p = -\dfrac{7}{2}$.
La tangente (T) a donc pour équation $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{7}{2}$.

Exercice 8 : autour du nombre dérivé

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Calculer $f'(9)$ et $f'(3)$.
2. Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 2$?
3. Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = -1$?

Solution :

1. La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

   Par conséquent, $f'(9) = \dfrac{1}{2\sqrt{9}} = \dfrac{1}{6}$ et $f'(3) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.
2. Pour tout $x > O$, $f'(x) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{16}$.

   Il existe donc un unique réel tel que $f'(x) = 2$: $x = \dfrac{1}{16}$.
3. Pour tout $x > O$, $f'(x) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = -1$. Or, pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$. Par conséquent, il n'existe pas de réel x tel que $f'(x) = -1$.

Exercice 9 : Tangente et second degré (que du bonheur !)

Soit f la fonction trinôme définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$. On note $\mathcal{P}$ sa courbe représentative.
On sait que $f(0) = 2$; $f(-1) = 5$ et $f'(-1) = 2$.

1. Monter que les réels a, b et c sont solution d'un système de trois équations à trois inconnies. Résoudre ce système.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse -1.

Solution :

1. $f(0) = 2 \Leftrightarrow a \times 0^2 + b \times 0 + c = 2 \Leftrightarrow c = 2$.
   $f(-1) = 5 \Leftrightarrow a - b + c = 5 \Leftrightarrow a - b = 5 - c \Leftrightarrow a - b = 3$.
   La fonction f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = 2ax + b$. Donc : $f'(-1) = 2 \Leftrightarrow 2a(-1) + b = 2 \Leftrightarrow -2a + b = 2$.
   Nous devons alors résoudre le système suivant :

   $$\begin{cases} a - b = 3 \\ -2a + b = 2 \end{cases}$$

   Ce système est équivalent à

   $$\begin{cases} a = 3 + b \\ -2(3 + b) + b = 2 \end{cases}$$

   c'est-à-dire

   $$\begin{cases} a = 3 + b \\ b = -8 \end{cases}$$

   Par conséquent, f est définie sur $_{R}$ par $f(x) = -5x^2 - 8x + 2$.
   Vérifications :

(a) $f(0) = 2$

(b) $f(-1) = -5 + 8 + 2 = 5$

(c) $f'(-1) = -10 \times (-1) - 8 = 2$

2. f est dérivable en -1 et $f(-1) = 2$. Donc la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse -1 a pour équation $y = 2x + p$, avec $p \in \mathbb{R}$.
De plus, cette tangente passe par le point $A(1\ ;\ f(1))$, donc $f(1) = 2 + p$, soit $-5 - 8 + 2 = 2 + p$, d'où $p = -13$.
La tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse -1 a donc pour équation $y = 2x - 13$.

Guesmi.B