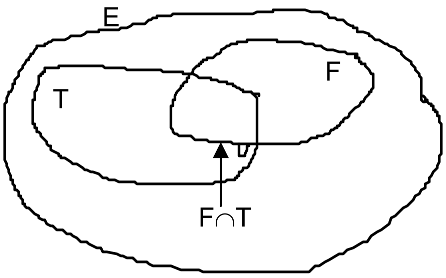
# Dénombrement

## I Utilisation de diagrammes, de tableaux, d'arbres

*Exemple*

Un centre de loisirs accueille 100 enfants.
Deux sports sont proposés : le football et le tennis.
A la question : Aimez-vous le football ? 60 enfants lèvent la main.
A la question : Aimez-vous le tennis ? 45 enfants lèvent la main.
A la question : Aimez-vous le tennis et le football ? 18 enfants lèvent la main.

On peut représenter ces données par un diagramme :
A l'intérieur de l'ensemble E des enfants, on représente en jaune l'ensemble F des enfants qui aiment le football et en bleu l'ensemble T des enfants qui aiment le tennis.
L'intersection $F \cap T$ des deux ensembles F et T apparaît en vert.

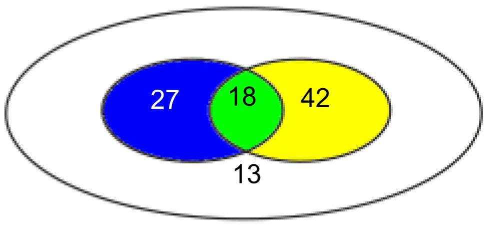



On complète ensuite les effectifs des différentes parties en utilisant les données :

18 enfants aiment à la fois le tennis et le football.
On place le nombre 18 dans la partie verte.

60 enfants aiment le football, mais parmi ces 60 enfants

Il y a donc $60 - 18 = 42$ enfants qui aiment le football sans aimer le tennis.
On place le nombre 42 dans la partie jaune.




45 enfants aiment le tennis, mais parmi ces 45 enfants on sait qu'il y en a 18 qui aiment aussi le football.
Il y a donc $45 - 18 = 27$ enfants qui aiment le tennis sans aimer le football.
On place le nombre 27 dans la partie bleue.

Il y a donc $27 + 18 + 42 = 87$ enfants qui aiment le tennis ou le football (ou les deux).
Il reste donc $100 - 87 = 13$ enfants qui n'aiment aucun des deux sports.
On place le nombre 13 dans la partie non coloriée.

### Exercice 01

Un sondage auprès de 150 personnes a donné les résultats suivants :
A la question «Consommez vous régulièrement de l'alcool ?», 50 personnes répondent oui.
A la question «Êtes-vous fumeur ?», 80 personnes répondent oui.
A la question «Êtes-vous un fumeur consommant régulièrement de l'alcool ?», 35 personnes répondent oui.
Représenter ces données par un diagramme.
Combien de personnes sont des fumeurs ne consommant pas régulièrement de l'alcool ?
Combien de personnes consomment régulièrement de l'alcool et ne sont pas fumeurs ?
Combien de personnes ne sont pas fumeurs et ne cons
Combien de personnes sont fumeurs ou consomment régulièrement de l'alcool ?

## Exercice 02

On s'intéresse à la présence sur les véhicules d'un parc automobile des trois dispositifs de sécurité suivants : ABS ; Air Bags ; Correcteur de trajectoire.
On sait que :
7 véhicules ne sont munis d'aucun de ces dispositifs, alors que 18 véhicules sont munis des trois dispositifs.
Tous les véhicules munis d'un correcteur de trajectoire sont munis aussi d'au moins un autre dispositif de sécurité.
305 véhicules disposent de deux dispositifs de sécurité au moins.
298 véhicules disposent de l'ABS, 428 véhicules disposent d'air bags et 122 véhicules disposent des deux.
Enfin 87 véhicules disposent de l'ABS et d'un correcteur de trajectoire.
Représenter ces données par un diagramme.
Quel est le nombre total de véhicules de ce parc automobile ?
Quel est le nombre de véhicules de ce parc disposant d'un et d'un seul dispositif de sécurité ?
Quel est le nombre de véhicules de ce parc disposant d'au plus un dispositif de sécurité ?

## Définition

Etant donnés deux ensembles E et F, on appelle produit cartésien E×F, l'ensemble des couples $(a\,;b)$ avec $a \in$ E et $b \in$ F.

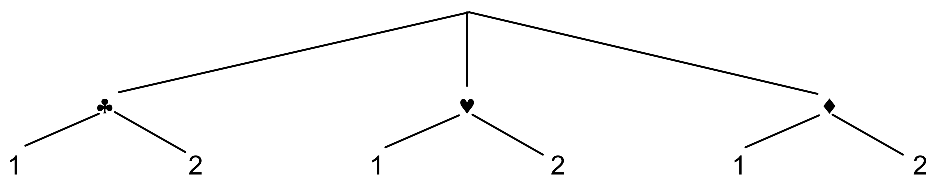
*Exemple*

Soit E = {♣ ; ♥ ; ♦} et F = {1 ; 2}.
On peut, dans un tableau à double entrée, écrire tous les éléments de E×F .

| E<br>F | ♣ | ♥ | ♦ |
|---|---|---|---|
| 1 | (♣ ; 1) | (♥ ; 1) | (♦ ; 1) |
| 2 | (♣ ; 2) | (♥ ; 2) | (♦ ; 2) |

Le nombre d'éléments de E×F est : card(E×F) = 6 = card(E) × card(F)

On peut utiliser une disposition en forme d'arbre pour retrouver tous ces éléments.




À chaque extrémité d'une branche de l'arbre correspond un élément de l'ensemble E×F :

(♣ ; 1) (♣ ; 2) (♥ ; 1) (♥ ; 2) (♦ ; 1) (♦ ; 2)

## Exercice 03

La référence d'une cartouche d'encre est composée d'une lettre choisie dans l'ensemble {A ; H ; S ; T } et d'un chiffre de l'ensemble {1 ; 3 ; 5}.
Écrire et dénombrer toutes les références possibles.

## Propriété

Si E et F sont des ensembles finis, le nombre d'éléments de E×F est égal au nombre d'éléments de E multiplié par le nombre d'éléments de F.

$$\text{card (EXF)} = \text{card(E)} \times \text{card(F)}$$

L'ensemble E×E est noté $E^2$ et on a $\text{card}(E^2) = [\text{card}(E)]^2$

*Remarque*

On peut généraliser le produit cartésien à plus de deux ensembles :
$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ est l'ensemble des $p$-uplets $(a_1 ; a_2 ; \ldots ; a_p)$ avec $a_i \in E_i$.
et on a card $(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \ldots \times \text{card}(E_p)$

Si les ensembles $E_1$ ; $E_2$ ... $E_p$ sont tous égaux à un même ensemble E, on note $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p = E^p$

et on a $\text{card}(E^p) = [\text{card}(E)]^p$

## Exercice 04

Un test d'aptitude consiste à poser à chaque candidat une série de quatre questions auxquelles il doit répondre par "Oui" ou "Non".
Un candidat répond au hasard. En utilisant une disposition en forme d'arbre, faire apparaître et dénombrer toutes les possibilités de répondre au test.

## Exercice 05

Un restaurant propose à ses clients un menu qui se compose :

- d'une entrée à choisir parmi trois entrées possibles notées : $E_1$, $E_2$, $E_3$,
- d'un plat à choisir parmi quatre plats possibles : $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$,
- d'un dessert à choisir parmi quatre desserts possibles : $D_1$, $D_2$, $D_3$, $D_4$.

Combien un client peut-il composer de menus différents ?
Combien un client peut-il composer de menus comportant le plat $P_2$ ?

## Exercice 06

Un établissement propose à ses élèves le choix de langues vivantes suivant :
Anglais (A) , Allemand (D) , Espagnol (E) , Italien (I) , Russe (R).
Un élève doit choisir deux langues vivantes : $LV_1$ et $LV_2$.
En vous aidant d'un diagramme en arbre ou d'un tableau énumérer et dénombrer tous les choix possibles.
En imaginant un arbre, dénombrer le nombre de choix possibles pour trois langues $LV_1$, $LV_2$, $LV_3$.

## Exercice 07

Un enfant possède 5 crayons de couleur : un rouge, un vert, un bleu, un jaune et un marron.
Il dessine un bonhomme et choisit : un crayon pour la tête, un crayon pour le corps et un crayon pour les membres.
Déterminer tous les choix possibles des trois crayons :
1°) En supposant qu'il peut utiliser la même couleur pour différentes parties.
2°) En supposant qu'il utilise toujours trois couleurs distinctes.

## Exercice 08

1°) Soit $E = \{1 , 2 , 3 , 4\}$.
 a)quel est le nombre d'elements de $E^3$, c'est-à-dire le nombre de triplets $(a ; b ; c)$ d'éléments de E.
 b) On appelle arrangement 3 à 3 des éléments de E, tout triplet $(a ; b ; c)$ d'éléments de E deux à deux distincts.
 En utilisant un arbre écrire tous les arrangements 3 à 3 des éléments de E.
 Les dénombrer.

2°) Soit $E = \{1 , 2 , 3 , 4\}$.
 a)Quel est le nombre d'éléments de $E^4$, c'est-à-dire le nombre de quadruplets $(a ; b ; c ; d)$ d'éléments de E.
 b) On appelle arrangement 4 à 4 des éléments de E, tout quadruplet $(a ; b ; c ; d)$ d'éléments de E deux à deux distincts.
 En utilisant l'arbre de la question précédente, dénombrer tous les arrangements 4 à 4 des éléments de E.

3°) Soit $E = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$.
 En imaginant un arbre, dénombrer le nombre d'arrangements 4 à 4 des éléments de E.

## Définition

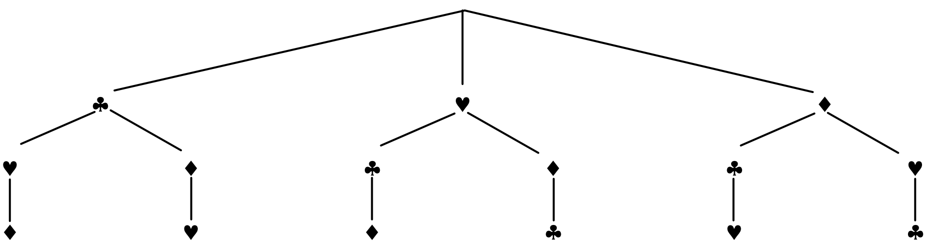
Soit E un ensemble fini de cardinal $n$.
Une permutation des éléments de E, est un $n$-uplet $(a_1 ; a_2 ; ... ; a_n)$ d'élements de E deux à deux distincts.

*Remarque*

Un $n$-uplet $(a_1 ; a_2 ; ... ; a_n)$ est une <u>suite</u> d'éléments de E, on tient donc compte de l'ordre dans lequel les éléments sont écrits. Comme il y a dans E $n$ éléments et que les $a_i$ sont deux à deux distincts, le $n$-uplet $(a_1 ; a_2 ; ... ; a_n)$ comporte tous les éléments de l'ensemble E.

*Exemple*

Soit E = $\{♣ ; ♥ ; ♦\}$ . On peut écrire toutes les permutations des éléments de E en utilisant un arbre :




On obtient 6 permutations : (♣ ; ♥ ; ♦) ; (♣ ; ♦ ; ♥) ; (♥ ; ♣ ; ♦) ; (♥ ; ♦ ; ♣) ; (♦ ; ♣ ; ♥) ; (♦ ; ♥ ; ♣).
Une permutation étant un triplet $(a ; b ; c)$ d'éléments de E deux à deux distincts, on peut choisir le premier élément $a$ de 3 façons dans l'ensemble E.
Pour chaque choix de $a$, on peut choisir le deuxième élément $b$ de 2 façons possibles (puisqu'il doit être différent de $a$).
On a donc $3 \times 2 = 6$ façons de choisir les deux premiers élements $a$ et $b$.
Lorsque les deux premiers éléments sont choisis, il ne reste plus qu'une seule possibilité de choix pour le troisième élément $c$.
Le nombre de permutations des éléments de E est donc $3 \times 2 \times 1 = 6$

## Propriété

Le nombre de permutations d'un ensemble ayant $n$ éléments est : $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times ... \times 2 \times 1$.

## Définition

Si $n$ est un entier strictement positif, on appelle factorielle de $n$ (ou $n$ factorielle) le nombre noté $n!$ égal au produit de tous les entiers naturels compris entre 1 et $n$.

$n! = 1 \times \cdots \times n$

Par convention, on posera $0! = 1$.

*Remarque*

Les calculatrices scientifiques et les logiciels de calcul formel sur ordinateur permettent de calculer $n!$ pour un nombre entier $n$ "raisonnable" (sur TI 89 : Menu Maths-Probabilités).

### Exercice 09

On considère une classe de 29 élèves.
On s'intéresse à l'ordre dans lequel les élèves sortent de la classe à la fin d'un cours.
En supposant que les élèves sortent tous par la porte, l'un après l'autre, et que toutes les possibilités doivent être envisagées, déterminer le nombre d'ordres de passage possibles.

### Exercice 10

Sans utiliser de calculatrice, donner la valeur de :

$5!$ ; $\dfrac{6!}{5!}$ ; $\dfrac{9!}{7!}$ ; $\dfrac{12!}{9!\,3!}$ ; $\dfrac{1000!}{998!}$

## II Combinaisons

*Exemple*

Dans une classe de 35 élèves, on veut choisir deux élèves délégués de classe et on veut déterminer le nombre de choix possibles.

On peut pour cela imaginer un arbre dans lequel le choix du premier élève correspondra à 35 branches.
Une fois le premier élève choisi, le choix du deuxième élève correspondra à 34 branches (il ne faut pas choisir deux fois le même élève).
On obtiendrait alors $35 \times 34 = 1190$ branches.
Mais en faisant ainsi, on compte deux fois chacune des possibilités. En effet, par exemple, le choix de Mlle X et de M. Y apparaîtra deux fois (X ; Y) et (Y ; X) alors qu'il s'agit du même choix de deux personnes.
Chaque possibilité apparaissant ainsi deux fois dans l'arbre, le nombre de choix possible est $\frac{1190}{2} = 595$

Le choix de deux délégués correspond au choix d'une partie de la classe ayant deux éléments.
On dénombre donc dans la classe 595 parties à 2 éléments.

En faisant le même raisonnement pour le choix de 3 élèves, un arbre donnerait $35 \times 34 \times 33$ branches, mais chaque possibilité apparaît 6 fois dans l'arbre (nombre de permutations des 3 éléments choisis : $3! = 6$)
Le nombre de choix possibles de 3 élèves est donc $\frac{35 \times 34 \times 33}{6} = 35 \times 17 \times 11 = 6545$

Le choix de trois délégués correspond au choix d'une partie de la classe ayant trois éléments.
On dénombre donc dans la classe 6545 parties à 3 éléments.

### Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal $n$.
On appelle combinaison $p$ à $p$ des éléments de E, toute partie de E ayant $p$ éléments.

*Remarque*

Pour une combinaison (comme pour un arrangement) les éléments doivents être deux à deux distincts.
Dans une combinaison on ne tient compte de l'ordre des éléments (contrairement à un arrangement).
Un ensemble et une partie d'ensemble sont notés avec des accolades { ; } , l'ordre entre les éléments n'intervient pas.
Ainsi {1 ; 2 ; 3} est une partie à trois éléments de l'ensemble E = { 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 } , c'est une combinaison 3 à 3 des éléments de E.
La combinaison {1 ; 2 ; 3} est identique à la combinaison {3 ; 2 ; 1} , à la combinaison {2 ; 3 ; 1} ...
La notation avec des parenthèses (1 ; 2 ; 3) correspond à une suite d'éléments dans laquelle l'ordre intervient. Le triplet (1 ; 2 ; 3) est différent du triplet (2 ; 3 ; 1) , différent du triplet (3 ; 2 ; 1) ...

### Exercice 11

A l'arrivée d'une course de chevaux le tiercé gagnant dans l'ordre est (7 ; 3 ; 12).
Quels sont les tiercés gagnants dans le désordre ? Combien y-a-t-il de tiercés gagnants ?

### Notation

Soit E un ensemble fini de cardinal $n$ et soit $p$ un entier naturel non nul.

Le nombre de combinaisons $p$ à $p$ des éléments de E est noté $\binom{n}{p}$ ou $C_n^p$ .

### Exercice 12

On considère l'ensemble $E = \{ a , b , c \}$ .

Écrire toutes les combinaisons 2 à 2 des éléments de E. Déterminer $\binom{3}{2}$.

Déterminer $\binom{3}{1}$ ; $\binom{3}{3}$ ; $\binom{3}{4}$ ; $\binom{3}{0}$.

## Exercice 13

Déterminer $\binom{4}{0}$ ; $\binom{4}{1}$ ; $\binom{4}{2}$ ; $\binom{4}{3}$ ; $\binom{4}{4}$.

## Propriété

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 1.

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{p} = 0$ lorsque $p > n$
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ $\qquad (0 \leqslant p \leqslant n)$
- $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$ $\qquad (1 \leqslant p \leqslant n)$

## Triangle de Pascal

Les nombres $\binom{n}{p}$ avec $0 \leqslant p \leqslant n$ sont donnés par le triangle de Pascal :

| | $p=0$ | $p=1$ | $p=2$ | $p=3$ | $p=4$ | $p=5$ | $p=6$ | $p=7$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=0$ | 1 | | | | | | | | |
| $n=1$ | 1 | 1 | | | | | | | |
| $n=2$ | 1 | 2 | 1 | | | | | | |
| $n=3$ | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | |
| $n=4$ | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | |
| $n=5$ | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | |
| $n=6$ | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | |
| $n=7$ | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | |

## Exercice 14

Faire la somme de chacune des lignes du triangle de Pascal. Que remarque-t-on ?

## Exercice 15

Dans l'ensemble E = {1 ; 2 ; 3 ; ... ; 15} , on choisit une suite de 3 éléments deux à deux distincts (c'est-à-dire un arrangement 3 à 3 des éléments de E). Montrer que l'on a $\dfrac{15!}{(15-3)!}$ choix possibles.

On considère la partie { 5 ; 7 ; 14 }, combinaison 3 à 3 des éléments de E.
Combien y-a-t-il de permutations de l'ensemble { 5 ; 7 ; 14 } ?

En déduire une expression de $\binom{15}{3}$ utilisant la notation factorielle.

## Propriété

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal $n$ et soit $p$ un entier naturel.
Le nombre de combinaisons $p$ à $p$ des éléments de E est :

- $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$
- $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$ si $p \leqslant n$

*Remarque*

Les calculatrices scientifiques permettent de calculer le nombre de combinaisons pour un nombre entier $n$ "raisonnable" (sur TI menu Maths-Probabilités)
Si $n = 15$ et $p = 3$, écrire 15 nCr 3 avec une TI82 ou nCr(15,3) avec une TI89

## Exercice 16

En utilisant l'expression $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$, retrouver le résultat $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$ $\quad (1 \leqslant p \leqslant n)$

## Exercice 17

Développer $(a+b)^2$ ; $(a+b)^3$ ; $(a+b)^4$. Écrire les résultats en utilisant les nombres $\binom{n}{p}$.

## Propriété

Formule du binôme de Newton : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $a \in \mathbb{C}$ et pour tout $b \in \mathbb{C}$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{p} a^{n-p} b^p + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

*Remarque*

Cette formule, valable pour des nombres complexes, est bien entendu valable pour des nombres réels.

## Exercice 18

En utilisant la formule du binôme de Newton, développer $(a+b)^5$.

## Exercice 19

Appliquer la formule du binôme de Newton avec $a = 1$ et $b = 1$. Que peut-on en déduire ?

## Propriété

Le nombre de parties d'un ensemble de cardinal $n$ est $2^n$.

c'est-à-dire que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{p} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} = 2^n$

## Exercice 20

Écrire et dénombrer toutes les parties de E = $\{♣ ; ♦ ; ♥ ; ♠\}$

## Exercice 21

Un numéro de téléphone portable est formé de 10 chiffres dont les deux premiers sont 0 et 6.
Combien de numéros de téléphone portable sont disponibles ?

## Exercice 22

Pour remplir une grille de loto, il faut cocher 6 cases sur 49. Sachant que l'on met 10 secondes pour remplir une grille, combien de temps faudrait-il pour remplir toutes les grilles différentes possibles.

## Exercice 23

Pour choisir le canal d'émission d'un appareil utilisant des ondes radios, on dispose de 8 interrupteurs.
On peut positionner chacun de ces interrupteurs sur 0 ou 1. Combien y-a-t-il de canaux disponibles.

*Démonstration* 01

Une permutation des éléments de E, est un $n$-uplet $(a_1 ; a_2 ; ... ; a_n)$ d'élements de E deux à deux distincts.

Pour choisir le premier élément $a_1$, on a $n$ choix possibles puisque le cardinal de E est $n$.
Pour choisir le deuxième élément $a_2$, on a $n - 1$ choix possibles puisqu'on ne peut pas reprendre l'élément déjà choisi pour $a_1$.
Pour choisir le troisième élément $a_3$, on a $n - 2$ choix possibles.
....
Pour choisir le dernier élément $a_n$, il ne restera plus qu'un seul choix possible.

(On peut imaginer un arbre pour écrire toutes les permutations de E)

Le nombre de permutations de E est alors : $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times ... \times 2 \times 1$

*Démonstration* 02

Soit E un ensemble à $n$ éléments ($n \geqslant 1$)

- Il y a une seule partie à 0 éléments dans E, c'est la partie vide. Donc $\binom{n}{0} = 1$
- Il y a une seule partie à $n$ éléments dans E, c'est la partie E elle-même, donc $\binom{n}{n} = 1$
- E possède $n$ éléments, donc $n$ parties à un élément. Donc $\binom{n}{1} = n$
- Pour obtenir une partie à $(n - 1)$ éléments dans E, il faut enlever un élément à l'ensemble E.
  Comme E possède $n$ éléments, on a $n$ possibilités d'enlever un élément.
  L'ensemble E a donc $n$ parties à $(n - 1)$ éléments. Donc $\binom{n}{n-1} = n$
- Toute partie de E a un nombre d'éléments inférieur ou égal à celui de E.
  Si $p > n$ , il n'existe donc dans E aucune partie ayant $p$ éléments donc $\binom{n}{p} = 0$ .
- Si $0 \leqslant p \leqslant n$, on peut remarquer que lorsqu'on choisit dans E une partie A ayant $p$ éléments, on "laisse de coté" les $(n - p)$ éléments qui n'appartiennent pas à A.
  Donc on crée, par élimination, une partie à $(n - p)$ éléments.
  De même en prenant une partie à $(n - p)$ éléments, on crée, par élimination, une partie à $p$ éléments.
  On a donc, dans E, autant de parties à $p$ éléments que de parties à $(n - p)$ éléments.$(n - p)$
  Donc $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- Considérons un ensemble F ayant $(n + 1)$ éléments, et choisissons un élément particulier $a$.
  Soit E l'ensemble F auquel on retire l'élément $a$. E est alors un ensemble possédant $n$ éléments.
  $\binom{n+1}{p}$ correspond au nombre de parties de F ayant $p$ éléments.
  Parmi les parties de F ayant $p$ éléments, on peut considérer les parties qui contiennent l'élément particulier $a$ et les parties qui ne contiennent pas $a$.

  Les parties de F ayant $p$ éléments et qui contiennent l'élément $a$, contiennent aussi $(p - 1)$ éléments différents de $a$, c'est-à-dire $(p - 1)$ éléments de l'ensemble E.
  On a donc autant de parties de F ayant $p$ éléments et qui contiennent l'élément $a$, que de parties de E ayant $(p - 1)$ éléments, c'est-à-dire $\binom{n}{p-1}$.
  Les parties de F ayant $p$ éléments et qui ne contiennent pas l'élément $a$, sont des parties à $p$ éléments de l'ensemble E.
  On a donc autant de parties de F ayant $p$ éléments et qui ne contiennent pas l'élément $a$, que de parties de E ayant $p$ éléments, c'est-à-dire $\binom{n}{p}$.

  Il y a donc dans F, $\binom{n}{p-1}$ parties à $p$ éléments contenant $a$ et $\binom{n}{p}$ parties à $p$ éléments ne contenant pas $a$. Il y a donc en tout $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}$ parties de F à $p$ éléments.
  Donc $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}$ .

*Démonstration* 03

| | $p=0$ | $p=1$ | $p=2$ | $p=3$ | $p=4$ | $p=5$ | $p=6$ | $p=7$ | $\dots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=0$ | 1 | | | | | | | | |
| $n=1$ | 1 | 1 | | | | | | | |
| $n=2$ | 1 | 2 | 1 | | | | | | |
| $n=3$ | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | |
| $n=4$ | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | |
| $n=5$ | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | |
| $n=6$ | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | |
| $n=7$ | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | |

La relation $\binom{n}{0} = 1$ permet de remplir la colonne de gauche du triangle. On admet que $\binom{0}{0} = 1$

La relation $\binom{n}{n} = 1$ permet de compléter "l'hypothénuse" du triangle.

La relation $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}$ permet de passer d'une ligne à l'autre par des additions.

Par exemple

- avec $n = 1$ et $p = 1$, on obtient $\binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2$
- avec $n = 5$ et $p = 1$, on obtient $\binom{6}{1} = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} = 1 + 5 = 6$
- avec $n = 5$ et $p = 3$, on obtient $\binom{6}{3} = \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$
- avec $n = 5$ et $p = 5$, on obtient $\binom{6}{5} = \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 5 + 1 = 6$

*Démonstration* 04

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal $n$ et soit $p$ un entier naturel.

On a déjà vu que si $p > n$, on a $\binom{n}{p} = 0$ (démonstration 2)

Considérons la proposition P($n$) : pour tout entier $p$ tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

prenons $n = 1$ alors pour $p = 0$ on a $\dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} = \dfrac{1!}{0!\,1!} = 1$ (il est convenu que 0! = 1) et $\binom{1}{0} = 1$

pour $p = 1$ on a $\dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} = \dfrac{1!}{1!\,0!} = 1$ et $\binom{1}{1} = 1$

Donc la proposition P(1) est vraie.

Supposons que la proposition P($n$) est vrai pour un entier fixé $n \geqslant 1$ .
Démontrons qu'alors la proposition P($n + 1$) est vraie,

c'est-à-dire que : pour tout entier $p$ tel que $0 \leqslant p \leqslant n + 1$ , on a $\binom{n+1}{p} = \dfrac{(n+1)!}{p!\,(n+1-p)!}$

Soit $p$ un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n + 1$

Si $p = n + 1$ , alors $\binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ et $\dfrac{(n+1)!}{p!\,(n+1-p)!} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)!\,0!} = 1$

Si $p \neq n + 1$, alors $p \leqslant n$

On peut alors écrire $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}$

Comme on a supposé que P($n$) est vraie, on a : $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

et $\binom{n}{p-1} = \dfrac{n!}{(p-1)!\,(n-(p-1))!} = \dfrac{n!}{(p-1)!\,(n-p+1)!}$

donc $\binom{n+1}{p} = \dfrac{n!}{(p-1)!\,(n-p+1)!} + \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} = \dfrac{n! \times p}{(p-1)! \times p \times (n-p+1)!} + \dfrac{n! \times (n-p+1)}{p!\,(n-p)! \times (n-p+1)}$

donc $\binom{n+1}{p} = \dfrac{n! \times p}{p! \times (n-p+1)!} + \dfrac{n! \times (n-p+1)}{p!\,(n-p+1)!} = \dfrac{n! \times p + n! \times (n-p+1)}{p!\,(n-p+1)!} = \dfrac{n! \times (n-p+1+p)}{p!\,(n-p+1)!}$

donc $\binom{n+1}{p} = \dfrac{n! \times (n+1)}{p!\,(n-p+1)!} = \dfrac{(n+1)!}{p!\,(n-p+1)!}$

On a donc démontré que pour tout entier $p$ tel que $0 \leqslant p \leqslant n + 1$, on a $\binom{n+1}{p} = \dfrac{(n+1)!}{p!\,(n+1-p)!}$ , c'est-à-dire que P($n + 1$) est vraie.

La proposition P($n$) est donc démontrée par récurrence pour tout $n \geqslant 1$ .

Donc pour tout entier $p$ tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$ .

*Démonstration* 05

$a$ et $b$ étant deux nombres complexes, on considère la proposition P($n$) : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$

Démontrons par récurrence que P($n$) est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a $\binom{1}{0} = 1$ et $\binom{1}{1} = 1$ , donc $\sum_{p=0}^{p=1} \binom{1}{p} a^{1-p} b^p = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b = (a+b)^1$

La proposition P(1) est donc vérifiée.

Supposons que P($n$) est vraie pour un entier $n$ fixé, $n \geqslant 1$.

On a alors $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$

On peut écrire

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\left(\sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p\right) = a\left(\sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p\right) + b\left(\sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p\right)$$

$$= \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^{p+1} = a^{n+1} + \sum_{p=1}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=0}^{p=n-1} \binom{n}{p} a^{n-p} b^{p+1} + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{i=1}^{i=n} \binom{n}{i-1} a^{n-i+1} b^i + b^{n+1} \quad \text{(en remplaçant } p \text{ par } i-1\text{)}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=1}^{p=n} \binom{n}{p-1} a^{n+1-p} b^p + b^{n+1} \quad \text{(en remplaçant } i \text{ par } p\text{ )}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{p=n} \left[\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}\right] a^{n+1-p} b^p + b^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{p=1}^{p=n} \binom{n+1}{p} a^{n+1-p} b^p + b^{n+1}$$

On obtient alors $(a+b)^{n+1} = \sum_{p=0}^{p=n+1} \binom{n+1}{p} a^{n+1-p} b^p$ c'est-à-dire que P($n$+1) est vraie

On a donc démontré que la proposition P($n$) est vérifiée pour tout entier $n \geqslant 1$.

Guesmi.B

## Exercice 01

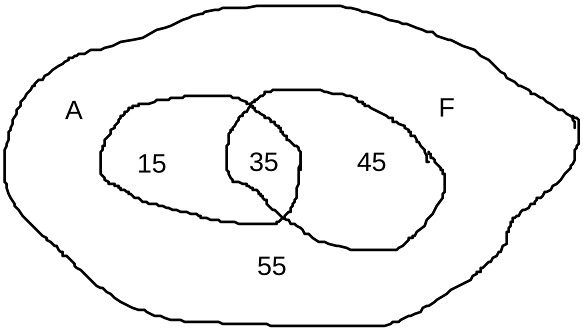
On représente sur un diagramme les ensembles :
A  ensemble des personnes consommant régulièrement de l'alcool
F  ensemble des fumeurs

Il y a 35 personnes qui fument et qui consomment régulièrement de l'alcool.
Donc le cardinal de l'ensemble $A \cap F$ est 35

50 personnes consomment régulièrement de l'alcool, et parmi ces 50 personnes sont aussi comptées les 35 personnes de l'ensemble $A \cap F$.
Il y a donc 50   35   15 personnes qui consomment régulièrement de l'alcool mais qui ne fument pas.

80 personnes fument, et parmi ces 80 personnes sont comptées les 35 personnes de l'ensemble $A \cap F$.
Il y a donc 80   35   45 personnes qui fument mais qui ne consomment pas régulièrement de l'alcool.

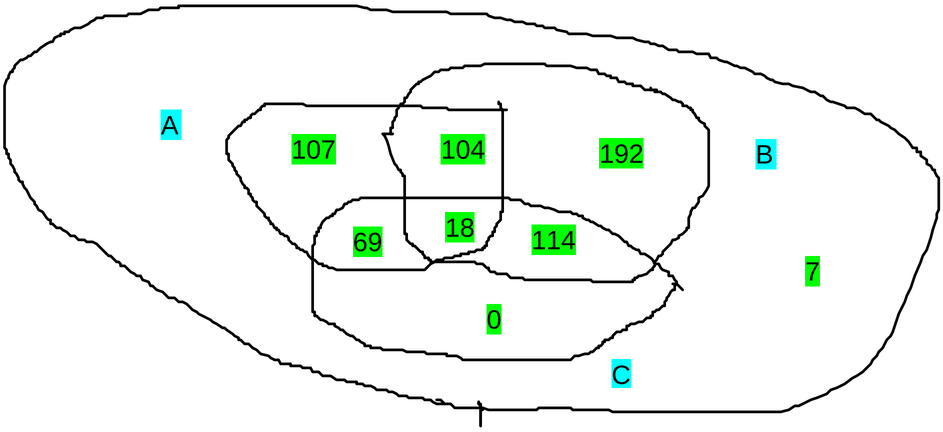
Il y a donc 15   35   45   95 personnes qui fument ou qui consomment régulièrement de l'alcool (ou les deux).
Il reste donc 150   95   55 personnes qui ne fument pas et qui ne consomment pas régulièrement de l'alcool.




45 personnes sont des fumeurs ne consommant pas régulièrement de l'alcool ?
15 personnes consomment régulièrement de l'alcool et ne sont pas fumeurs ?
55 personnes ne sont pas fumeurs et ne consomment pas régulièrement de l'alcool ?
95 personnes sont fumeurs ou consomment régulièrement de l'alcool ?

## Exercice 02

On représente sur un diagramme les ensembles :
A ensemble des véhicules munis d'un ABS
B ensemble des véhicules munis d'air bags.
C ensemble des véhicules munis d'un correcteur de trajectoire.




On peut compléter le diagramme en exploitant les données du texte :

7 véhicules ne sont munis d'aucun de ces dispositifs, alors que 18 véhicules sont munis des trois dispositifs.

Tous les véhicules munis d'un correcteur de trajectoire sont munis aussi d'au moins un autre dispositif de sécurité. Il n'y a donc aucun ( 0 ) véhicule muni uniquement d'un correcteur de trajectoire.

122 véhicules disposent de l'ABS et d'air bags, et parmi ces 122 véhicules sont déjà comptés les 18 véhicules possédant les trois dispositifs.
On a donc 122 - 18 - 104 véhicules disposant de l'ABS et d'air bags mais pas de correcteur de trajectoire.

87 véhicules disposent de l'ABS et d'un correcteur de trajectoire, et parmi ces 87 véhicules sont déjà comptés les 18 véhicules possédant les trois dispositifs.
On a donc 87 - 18 - 69 véhicules disposant de l'ABS et d'un correcteur de trajectoire, mais pas d'air bags.

305 véhicules disposent de deux dispositifs de sécurité au moins, mais parmi ces 305 véhicules ont déjà été comptés les 18 qui possèdent les trois dispositifs, les 69 disposant de l'ABS et d'un correcteur de trajectoire, mais pas d'air bags et les 104 disposant de l'ABS et d'air bags mais pas de correcteur de trajectoire.
Il reste donc 305 - 18 - 69 - 104 - 114 véhicules disposantd'air bags et d'un correcteur de trajectoire, mais pas de l'ABS.

298 véhicules disposent de l'ABS, mais parmi ceux-ci sont déjà comptés 104 18 69 véhicules munis d'un autre dispositif.
Il reste donc 298 - 104 - 18 - 69 - 107 véhicules munis uniquement de l'ABS.

428 véhicules disposent d'air bags, mais parmi ceux-ci sont déjà comptés 104 18 114 véhicules munis d'un autre dispositif.
Il reste donc 428 - 104 - 18 - 114 - 192 véhicules munis uniquement d'air bags.

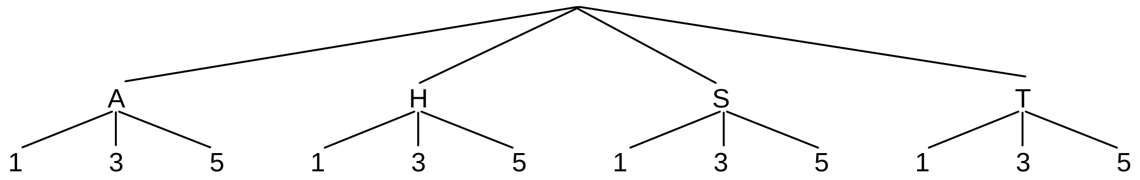
Le nombre total de véhicules est : 192 107 114 69 104 0 18 7 - 611
Le nombre de véhicules disposant d'un seul dispositif de sécurité est : 107 192 0 — 299
Le nombre de véhicules disposant d'au plus un dispositif de sécurité est : 7 107 192 0 - 306

## Exercice 03

La référence d'une cartouche d'encre correspond à un élément de l'ensemble E x F avec E = {A ; H ; S ; T }
et F = {1 ; 3 ; 5}

On peut donner toutes les références possibles en faisant un tableau ou un arbre.

| E<br>F | A | H | S | T |
|---|---|---|---|---|
| 1 | A1 | H1 | S1 | T1 |
| 3 | A3 | H3 | S3 | T3 |
| 5 | A5 | H5 | S5 | T5 |

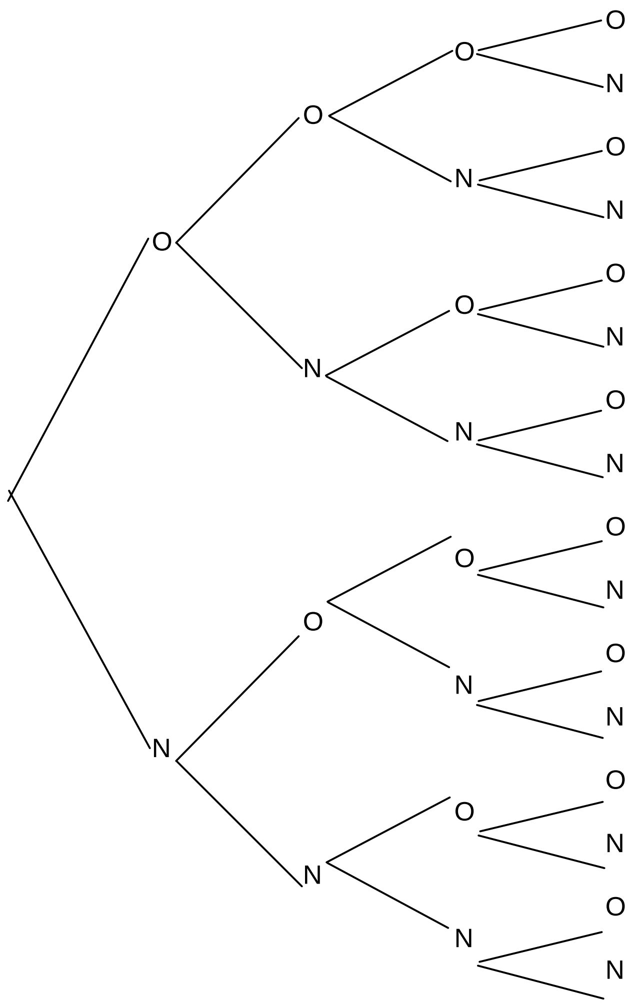



L'ensemble des références possibles est
{A1 ; A3 ; A5 ; H1 ; H3 ; H5 ; S1 ; S3 ; S5 ; T1 ; T3 ; T5}

Il y a 12 références possibles.

## Exercice 04

Une réponse au questionnaire consiste en une suite de quatre élements choisis parmi "oui" et "non".
En notant O pour "oui", N pour "non" et $E = \{O ; N\}$, on peut dire qu'une réponse au questionnaire est un élément de $E^4$.
On peut écrire tooutes possibilité en construisant un arbre :




Guesmi.B

Un candidat a 16 possibilités de réponse au questionnaire.

On peut retrouver ce résultat par le calcul
$\mathrm{Card}(E^4) = [\mathrm{card}(E)]^4 = 2^4 = 16.$

## Exercice 05

On pourrait écrire tous les menus en utilisant un arbre.
Un menu est un élément de E x P x D avec :
E - { E , E , E } P - { P , P , P , P } et D ˉ { D , D , D , D } .
On a card(E x P x D) card(E) x card(P) x card(D) - 3 x 4 x 4 48 .
Un client peut composer 48 menus.

Un menu comportant le plat P est un élément de E x P' x D avec
E - { E , E , E } P'- { P } et D_ { D , D , D , D } .
On a card(E x P' x D)- card(E) x card(P') x card(D)- 3 x 1 x 4- 12

Un client peut composer 12 menus comportant le plat P .

## Exercice 06

Les élèves ont le choix de langues suivant :
Anglais (A) , Allemand (D) , Espagnol (E) , Italien (I) , Russe (R).

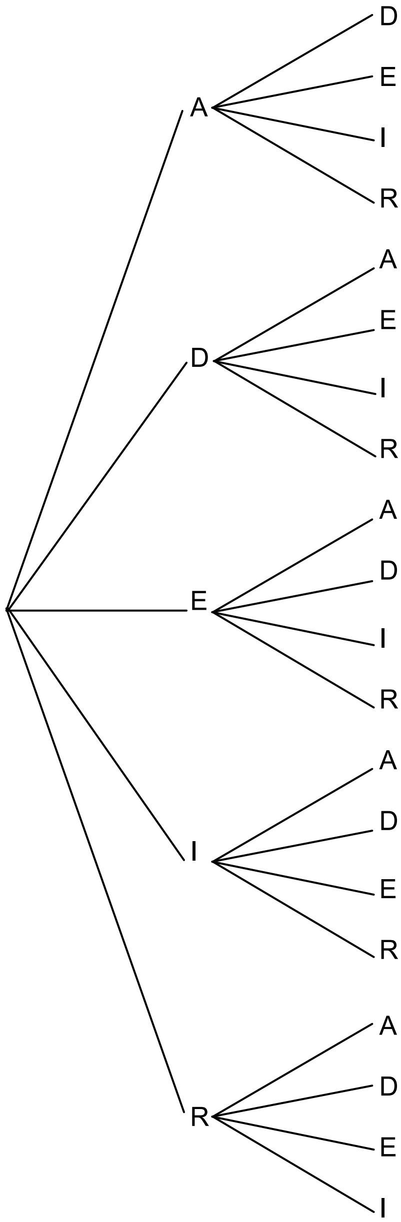
Un élève doit choisir deux langues vivantes : $LV_1$ et $LV_2$.
Dans le cadre d'un lycée, ces deux langues doivent être distinctes et choisies en tenant compte de l'ordre.
(Le choix $LV_1$ : Anglais et $LV_2$ : Allemand est différent du choix $LV_1$ : Allemand et $LV_2$ : Anglais)
On peut énumérer et dénombrer les choix en faisant un tableau :

| | A | D | E | I | R |
|---|---|---|---|---|---|
| A | | (A ; D) | (A ; E) | (A ; I) | (A ; R) |
| D | (D ; A) | | (D ; E) | (D ; I) | (D ; R) |
| E | (E ; A) | (E ; D) | | (E ; I) | (E ; R) |
| I | (I ; A) | (I ; D) | (I ; E) | | (I ; R) |
| R | (R ; A) | (R ; D) | (R ; E) | (R ; I) | |

Un élève qui choisit deux langues vivantes $LV_1$ et $LV_2$ a 20 choix possibles.

On peut retrouver sur un arbre tous les choix possibles des deux langues vivantes.
Comme on a 5 choix pour la première langue, puis seulement 4 choix pour la deuxième, le nombre de choix possibles de deux langues vivantes est :

$5 \times 4 = 20$




En imaginant de compléter cet arbre pour une troisième langue vivante et sachant qu'on aura alors seulement 3 choix possibles pour la 3ème langue, le nombre de choix possibles de 3 langues vivantes est :
$5 \times 4 \times 3 = 60$ .

Un élève qui choisit trois langues vivantes $LV_1$, $LV_2$, $LV_3$ a 60 choix possibles.

## Exercice 07

1° )En imaginant un arbre pour choisir :

- la couleur du crayon utilisé pour la tête  (5 choix possibles),
- la couleur du crayon utilisé pour le corps  (5 choix possibles),
- la couleur du crayon utilisé pour les membres  (5 choix possibles).

On dénombre  $5 \times 5 \times 5 = 125$ choix possibles.

Si l'enfant peut utiliser la même couleur pour les différentes parties, il a 125 choix possibles.

2° )Le même arbre dans lequel on ne pourra pas utiliser deux foix la même couleur, permet de dénombrer :
$5 \times 4 \times 3 = 60$ choix possibles.

Si l'enfant doit utiliser trois couleurs distinctes pour les différentes parties, il a 60 choix possibles.

Guesmi.B

## Exercice 08

1° )a) E = {1 , 2 , 3 , 4}.

On a card(E) = 4, donc card(E ) card(E) $^{3}$ = $4^{3}$ donc card($E^{3}$) = 64

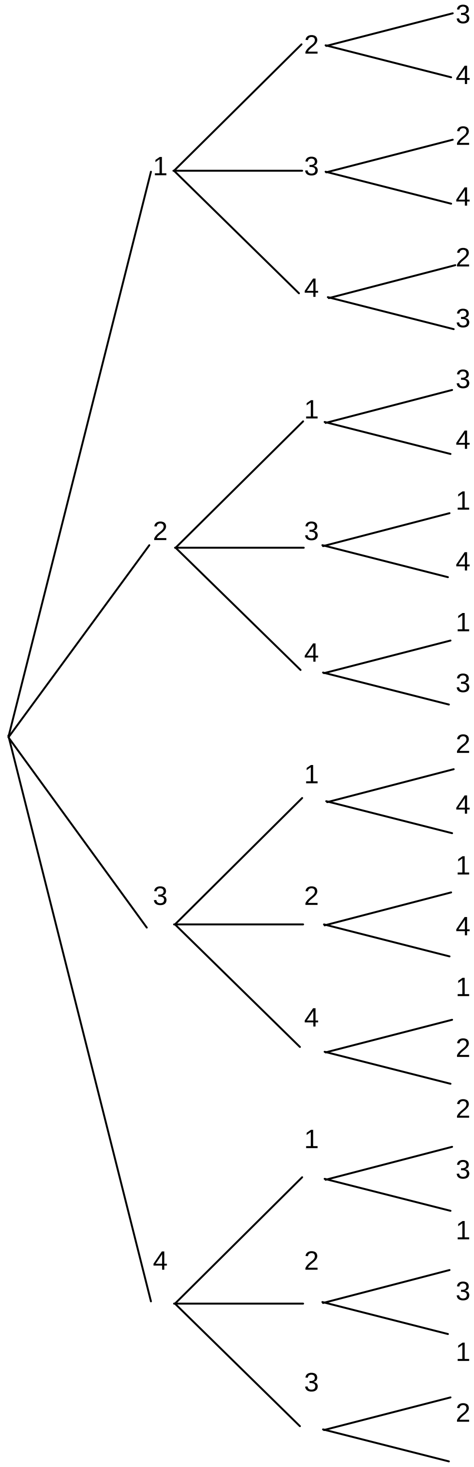
b) L'arbre ci-contre permet de donner tous les arrangements 3 à 3 des éléments de E.

Il y a 24 arrangements 3 à 3 des éléments de E

(24 = 4 x 3 x 2)

2° )a) On a card(E) 4, donc
card(E ) card(E) = 4
donc card(E ) = 256

b) On peut compléter l'arbre ci-contre avec une dernière branche.
Comme il ne reste plus qu'un seul choix possible pour le dernier élément, le nombre d'arrangements 4 à 4 des éléments de E est 4 x 3 x 2 x 1
Le nombre d'arrangements 4 à 4 des éléments de E est 24




3° )Soit E = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6} . On a card(E) = 6 .
En imaginant un arbre, on obtient que le nombre d'arrangements 4 à 4 des éléments de E est :
6 x 5 x 4 x 3 = 360

Le nombre d'arrangements 4 à 4 des éléments de E est 360.

## Exercice 09

Un ordre de sortie des élèves correspond à une permutation des élèves de la classe.

La classe comportant 29 élèves, le nombre de permutations des élèves de la classe est 29!

Il y a donc 29! ordres de sortie possibles pour les 29 élèves de la classe.

29! = 8 841 761 993 739 701 954 543 616 000 000

$29! \approx 9 \times 10$

# Exercice 10

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 20 \times 6$ donc $5! = 120$

$\frac{6!}{5!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$, on peut simplifier $\frac{6!}{5!} = \frac{6 \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}$ donc $\frac{6!}{5!} = 6$

$\frac{9!}{7!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$, on peut simplifier $\frac{6!}{5!} = \frac{9 \times 8 \times \cancel{7} \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{7} \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}$

donc $\frac{9!}{7!} = 9 \times 8$ donc $\frac{9!}{7!} = 72$

En simplifiant 12! avec 9!, on obtient $\frac{12!}{9!} = 12 \times 11 \times 10$

donc $\frac{12!}{9!\ 3!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 2 \times 11 \times 10$ donc $\frac{12!}{9!\ 3!} = 220$

En simplifiant 1000! avec 998!, on obtient $\frac{1000!}{998!} = 1000 \times 999$ donc $\frac{1000!}{998!} = 999\ 000$

## Exercice 11

Si le tiercé gagnant dans l'ordre est (7 ; 3 ; 12), cela signifie que l'ensemble des trois premiers chevaux à l'arrivée est {7 ; 3 ; 12} .

En considérant toutes les permutations de l'ensemble {7 ; 3 ; 12} , on obtient tous les tiercés gagnants :

(7 ; 3 ; 12) ; (7 ; 12 ; 3) ; (3 ; 7 ; 12) ; (3 ; 12 ; 7) ; (12 ; 7 ; 3) ; (12 ; 3 ; 7)

Les tiercés gagnants dans le désordre sont :
(7 ; 12 ; 3) ; (3 ; 7 ; 12) ; (3 ; 12 ; 7) ; (12 ; 7 ; 3) ; (12 ; 3 ; 7)

Il y a au total 6 tiercés gagnants.

## Exercice 12

E  { , , }.

Les combinaisons 2 à 2 des éléments de E sont toutes les parties de E ayant deux éléments :

Les combinaisons 2 à 2 des éléments de E sont : { , } ; { , } ; { , }.

On a donc $\binom{3}{2} = 3$

Les combinaisons 1 à 1 des éléments de E sont toutes les parties de E ayant un élément :
{ } ; { } ; { }

On a donc $\binom{3}{1} = 3$

Les combinaisons 3 à 3 des éléments de E sont toutes les parties de E ayant trois éléments :
{ , , }

On a donc $\binom{3}{3} = 1$

Les combinaisons 4 à 4 des éléments de E sont toutes les parties de E ayant quatre éléments.
Il n'y a aucune partie ayant quatre éléments dans un ensemble ayant trois éléments.

On a donc $\binom{3}{4} = 0$

Les combinaisons 0 à 0 des éléments de E sont toutes les parties de E ayant zéro élément.
Il y a une partie ayant zéro élément, c'est la partie vide : $\varnothing$ .

On a donc $\binom{3}{0} = 1$

## Exercice 13

On considère l'ensemble E { , , , }.

Les combinaisons 0 à 0 des éléments de E sont toutes les parties de E ayant zéro élément.
Il y a une partie ayant zéro élément, c'est la partie vide : $\varnothing$ .

On a donc $\binom{4}{0} = 1$

Les combinaisons 1 à 1 des éléments de E sont toutes les parties de E ayant un élément :
{ } ; { } ; { } ; { }

On a donc $\binom{4}{1} = 4$

Les combinaisons 2 à 2 des éléments de E sont toutes les parties de E ayant deux éléments :
{ , } ; { , } ; { , } ; { , } ; { , } ; { , }

On a donc $\binom{4}{2} = 6$

Les combinaisons 3 à 3 des éléments de E sont toutes les parties de E ayant trois éléments :
{ , , } ; { , , } ; { , , } ; { , , }

(On peut remarquer que, pour obtenir une partie à 3 éléments de E, il faut enlever un élément et que l'on a ainsi quatre possibilités)

On a donc $\binom{4}{3} = 4$

Les combinaisons 4 à 4 des éléments de E sont toutes les parties de E ayant quatre éléments :
{ , , , }

On a donc $\binom{4}{4} = 1$

## Exercice 14

En faisant la somme de la ligne du triangle de Pascal, on obtient $2^n$

| | $p$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | | | | | | 1 | 2 |
| | 1 | 1 | | | | | | | 2 | 2 |
| | 1 | 2 | 1 | | | | | | 4 | 2 |
| | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | 8 | 2 |
| $n$ | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | 16 | 2 |
| | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | 32 | 2 |
| | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | 64 | 2 |
| $n$ | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | 128 | 2 |

## Exercice 15

$E = \{1 ; 2 ; 3 ; ... ; 15\}$ , on a donc $\text{card}(E) = 15$.

Pour choisir une suite de 3 éléments deux à deux distincts de E, on choisit un premier élément.
On a 15 choix possibles pour ce premier élément.
On choisit ensuite un deuxième élément, distinct du premier.
On a donc 14 choix possibles pour ce deuxième élément.
Pour le troisième élément, on aura 13 choix possibles.

Le nombre de choix possibles pour la suite de 3 éléments deux à deux distincts de E, est donc $15 \times 14 \times 13$
(On peut imaginer un arbre)

On peut d'autre part remarquer que $\dfrac{15!}{(15 \quad 3)!} = \dfrac{15!}{12!}$ et après simplification on obtient $\dfrac{15!}{12!} = 15 \times 14 \times 13$

Le nombre de suites de 3 éléments deux à deux distincts de E est donc égal à $\dfrac{15!}{(15-3)!}$.

La partie $\{ 5 ; 7 ; 14 \}$ a 3 éléments, donc il y a $3! = 6$ permutations de l'ensemble $\{ 5 ; 7 ; 14 \}$.

$\dbinom{15}{3}$ est le nombre de combinaisons 3 à 3 des 15 éléments de l'ensemble E.
Comme pour la combinaison $\{ 5 ; 7 ; 14 \}$, chaque combinaison 3 à 3 des éléments de E, donne $3! \quad 6$ suites d'éléments de E deux à deux distincts.

Sachant que l'on a $\dfrac{15!}{(15-3)!}$ suites possibles, on a $\dfrac{\dfrac{15!}{(15-3)!}}{3!}$ combinaisons 3 à 3 des éléments de E.

mbre de combinaisons 3 à 3 des éléments de E est donc $\dfrac{15!}{(15-3)! \quad 3!}$.

## Exercice 17

( ) 2 $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

( ) $a$ $3a$ $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{}{}$ $\binom{}{}$

( ) $( \quad )^3_3 ( \quad )_3^{\,3} \; ( ^3_3 \quad 3 \quad _3 \quad _3 ^3_3 )( \quad )_3 \quad 4^3 \quad 6 \quad 4^3$

$\binom{}{}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{}{}$ $\binom{}{}$ $\binom{}{}$

## Démonstration 05

$a$ et $b$ étant deux nombres complexes, on considère la proposition P($n$) : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$

Démontrons par récurrence que P($n$) est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a $\binom{1}{0} = 1$ et $\binom{1}{1} = 1$ , donc $\sum_{p=0}^{p=1} \binom{1}{p} a^{1-p} b^p = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b = (a+b)^1$

La proposition P(1) est donc vérifiée.

Supposons que P($n$) est vraie pour un entier $n$ fixé, $n \geqslant 1$.

On a alors $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$

On peut écrire

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\left(\sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p\right) = a\left(\sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p\right) + b\left(\sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p\right)$$

$$= \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^{p+1} = a^{n+1} + \sum_{p=1}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=0}^{p=n-1} \binom{n}{p} a^{n-p} b^{p+1} + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{i=1}^{i=n} \binom{n}{i-1} a^{n-i+1} b^i + b^{n+1} \quad \text{(en remplaçant } p \text{ par } i-1\text{)}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=1}^{p=n} \binom{n}{p-1} a^{n+1-p} b^p + b^{n+1} \quad \text{(en remplaçant } i \text{ par } p\text{)}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{p=n} \left[\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}\right] a^{n+1-p} b^p + b^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{p=1}^{p=n} \binom{n+1}{p} a^{n+1-p} b^p + b^{n+1}$$

On obtient alors $(a+b)^{n+1} = \sum_{p=0}^{p=n+1} \binom{n+1}{p} a^{n+1-p} b^p$ c'est-à-dire que P($n$+1) est vraie

On a donc démontré que la proposition P($n$) est vérifiée pour tout entier $n \geqslant 1$.

## Exercice 19

En appliquant la formule du binôme avec 1 et 1, on obtient :

$(1+1) - \binom{}{0} 1 \; 1 \quad \binom{}{1} 1 \quad 1 \qquad \binom{}{} 1 - 1 + \quad + \binom{}{} 1 \; 1$

donc $2 \quad \binom{}{0} + \binom{}{1} + \quad + \binom{}{} + \quad + \binom{}{}$

donc $2 - \sum_{0} \binom{n}{}$

On peut en déduire que le nombre total de combinaisons des éléments d'un ensemble E de cardinal $n$ est 2

## <u>Exercice 20</u>

Soit E $\{♣;♦;♥;♠\}$.
L'ensemble E comporte quatre éléments.
Le nombre de parties de E est donc 2
Donc il y a 16 parties de E.

Partie à 0 élément : $\varnothing$ . Il y en a $\binom{4}{0}$ - 1

Parties à 1 élément : $\{♣\}$ ; $\{♦\}$ ; $\{♥\}$ ; $\{♠\}$ . Il y en a $\binom{4}{1}$ - 4

Parties à 2 éléments : $\{♣;♦\}$ ; $\{♣;♥\}$ ; $\{♣;♠\}$ ; $\{♦;♥\}$ ; $\{♦;♠\}$ ; $\{♥;♠\}$. Il y en a $\binom{4}{2}$ - 6

Parties à 3 éléments : $\{♣;♦;♥\}$ ; $\{♣;♦;♠\}$ ; $\{♣;♥;♠\}$ ; $\{♦;♥;♠\}$. Il y en a $\binom{4}{3}$ - 4

Partie à 3 éléments : $\{♣;♦;♥;♠\}$. Il y en a $\binom{4}{4}$ - 1

On retrouve bien 1 4 6 4 1 - 16 parties.

## Exercice 21

Soit $E$ - $\{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 \}$

Un numéro de téléphone portable est formé de 10 chiffres dont les deux premiers sont 0 et 6.
Un numéro de téléphone portable est donc un élément du produit cartésien $\{ 0 \} \times \{ 6 \} \times E$ .

Le nombre de numéros de téléphone portable disponibles est donc :

card $( \{ 0 \} \times \{ 6 \} \times E )$ - card$( \{ 0 \} ) \times$ card $( \{ 6 \} ) \times$ card $(E)$ = $1 \times 1 \times 10$ .

Il y a donc 100 millions de numéros de téléphone portable disponibles.

Guesmi.B

## Exercice 22

Choisir une grille de loto revient à choisir une partie à 6 éléments de l'ensemble des 49 numéros.

Le nombre de grilles de loto différentes est donc :

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\,(49-6)!} = \frac{49!}{6!\,43!} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 49 \times 47 \times 46 \times 3 \times 44 = 13\,983\,816$$

Sachant que l'on met 10 secondes pour remplir une grille, il faudra donc 139 838 160 secondes pour remplir toutes les grilles.

On a $139\,838\,160/24 \times 60 \times 60 \approx 1618$

Donc il faudrait environ 1618 jours soit environ 4,5 années pour remplir toutes les grilles...

## Exercice 23

Choisir un canal revient à choisir une suite de 8 nombres égaux à 0 ou à 1

Si on note $E = \{ 0 ; 1 \}$, un canal correspond donc à un élément de E .

On a card (E ) card(E) - 2 256

Donc on a un choix de 256 canaux disponibles.

si vous avez des remarques contactez moi S.V.P