

LEÇON N° 3 :

Coefficients binomiaux, dénombrement des combinaisons, formule du binôme. Applications.

Pré-requis :

- Cardinal d'un ensemble fini, arrangements ;
- Raisonnement par récurrence.

3.1 Définitions et propriétés

Définition 1 : Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. On appelle *combinaison* de $p \in \mathbb{N}$ éléments de E toute partie de E à p éléments. On note $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons de p éléments d'une ensemble en contenant n (il se lit « p parmi n »). Les coefficients $\binom{n}{p}$ sont appelés *coefficients binomiaux*.

Remarques 1 :

- \emptyset est la seule partie de E à 0 éléments, donc $\binom{n}{0} = 1$,
 E est la seule partie de E à n éléments, donc $\binom{n}{n} = 1$;
- $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$ par définition ;
- Si $p > n$, il ne peut y avoir de parties de p éléments d'un ensemble en contenant n , donc si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$.

Théorème 1 : Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$. Alors

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! (n-p)!}$$

démonstration : Les nombre d'ensembles ordonnés de p éléments d'un ensemble à n éléments est A_n^p . Or il y a $\binom{n}{p}$ manières de choisir une partie à p éléments dans un ensemble à n éléments, et $p!$ manières d'ordonner les éléments dans chaque parties. Par le principe multiplicatif, on a donc l'égalité $A_n^p = p! \binom{n}{p}$, d'où le résultat, sachant que $A_n^p = n!/(n-p)!$. ■

Conséquences : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$.

Proposition 1 (formule de Pascal) :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

démonstration : Soit un ensemble E à n éléments. On suppose que l'on a « extrait » une partie à p éléments. Si l'on retire un élément $\{a\}$ à E , c'est soit un élément de la combinaison, soit non. Dans le premier cas, les $p-1$ éléments restants forment une partie de l'ensemble $E \setminus \{a\}$ de cardinal $n-1$, et dans le second, ce sont les p éléments qui forment une partie de $E \setminus \{a\}$. Cette union étant disjointe, les cardinaux s'ajoutent pour aboutir à l'égalité demandée. ■

Triangle de Pascal :

$n \setminus p$	0	1	2	3	...
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Corollaire 1 (formule itérée de Pascal) : Soit $p \leq n$ deux entiers naturels. Alors

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

démonstration : On effectue une récurrence sur l'entier n .

- **Initialisation :** Lorsque $n = p$, les deux membres valent 1 d'après la remarque 1.
- **Hérédité :** Supposons la formule vraie au rang n , et montrons qu'elle est encore au rang $n+1$:

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \stackrel{H.R.}{=} \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}.$$

La dernière égalité étant justifiée par la formule de Pascal. ■

3.2 Formule du binôme de Newton**Théorème 2 (formule du binôme) :** Soit A un anneau, a, b deux éléments de A qui commutent. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Remarque 2 : Les coefficients binomiaux tirent leur appellation de cette formule.

démonstration : Par récurrence sur l'entier n .

- **Initialisation** : Lorsque $n = 0$, les deux membres sont égaux à 1 (avec le cas échéant la convention $0^0 = 1$).
- **Hérédité** : Supposons la formule vraie au rang n , et montrons qu'elle est encore au rang $n + 1$:

$$\begin{aligned}
 (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n \stackrel{H.R.}{=} (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
 &= \underbrace{a^{n+1}}_{(k=n+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \underbrace{b^{n+1}}_{(k=0)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
 &= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k}.
 \end{aligned}$$

La dernière égalité utilise la formule de Pascal pour l'addition des deux coefficients binomiaux. ■

Corollaire 2 : On a les égalités suivantes :

$$\text{(i)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad ; \quad \text{(ii)} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

démonstration : Pour (i), on utilise le théorème précédent avec $a = 1$ et $b = 1$. Pour (ii), on l'utilise avec $a = -1$ et $b = 1$. ■

Remarque 3 : Le point (i) traduit le fait que le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n . En effet, ce nombre est la somme des nombres de parties ayant respectivement 0, 1, ... éléments (le cardinal d'une union disjointe est la somme des cardinaux), ce qui correspond bien à la somme indiquée.

3.3 Applications

3.3.1 Exemples triviaux

Le Loto : Il s'agit de choisir 7 nombres parmi 49. L'ordre ne comptant pas, on dénombre le nombre de parties de 7 éléments de l'ensemble $\{1, \dots, 49\}$ de cardinal 49 : il y a donc $\binom{49}{7}$ possibilités, soit 85 900 584.

Dénombrément : On tire au hasard 5 cartes d'un jeu en comptant 32. Combien de tirages sont possibles où l'on ait...

- exactement trois rois ? $\binom{4}{3} \cdot \binom{28}{2} = 1\,512$;
- au moins trois rois ? $\binom{4}{3} \cdot \binom{28}{2} + \binom{4}{4} \cdot \binom{28}{1} = 1\,540$;
- deux ♥ et trois ♦ ? $\binom{8}{2} \cdot \binom{8}{3} = 1\,568$;

3.3.2 Sommes

La formule itérée de Pascal permet de déterminer des sommes de la forme $\sum_{k=0}^n k^p$ pour un certain p donné. Voyons par exemple ce que cela donne avec $p = 1$, puis $p = 2$.

$p = 1$:

$$\sum_{k=0}^n k = \sum_{k=0}^n \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$p = 2$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{2} = \sum_{k=0}^n \frac{k!}{2!(k-2)!} = \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)}{2} = \binom{n+1}{3},$$

les premières égalités étant du calcul formel, et la dernière l'application de la formule itérée de Pascal. On en tire alors (connaissant le résultat pour $p = 1$) :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n k^2 = \binom{n+1}{3} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3.3.3 Trigonométrie (linéarisation)

Exercice : Linéariser $\sin^3(x)$.

$$\begin{aligned} \sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{8i} (e^{ix} - e^{-ix})^3 \\ &= -\frac{1}{8i} (e^{3ix} - \binom{3}{1} e^{2ix} e^{-ix} + \binom{3}{2} e^{ix} e^{-2ix} - e^{-3ix}) \\ &= -\frac{1}{8i} (e^{3ix} - e^{-3ix} - 3(e^{ix} - e^{-ix})) = -\frac{1}{4} (\sin(3x) - 3 \sin x). \end{aligned}$$

3.3.4 Petit théorème de Fermat

Théorème 3 : Soient p un entier naturel premier et $a \in \mathbb{Z}$. Alors $a^p \equiv a \pmod{p}$.

démonstration : Puisque p est premier, alors pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$, p divise $\binom{p}{k}$. En effet, $\binom{p}{k} = p(p-1) \cdots (p-k+1)/k! \Leftrightarrow k! \binom{p}{k} = p(p-1) \cdots (p-k+1)$. Comme p est premier, il est premier avec tout entier le précédent, donc $p \wedge k = 1$, et il vient que p ne divise pas $k!$. Par le théorème de Gauss, il s'ensuit que p divise $\binom{p}{k}$. Procédons ensuite par récurrence sur l'entier $a \in \mathbb{N}$:

- **Initialisation** : Si $a = 0$, le résultat est évident.
- **Hérédité** : Supposons que $(a-1)^p \equiv a-1 \pmod{p}$.

$$a^p = (a-1+1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (a-1)^k \equiv (a-1)^p + 1 \pmod{p} \stackrel{H.R.}{\equiv} a-1+1 \pmod{p} \equiv a \pmod{p}.$$

Si $a \in (-\mathbb{N})^*$, alors $-a \in \mathbb{N} \Rightarrow (-a)^p \equiv -a \pmod{p}$. Supposons alors un instant $p \neq 2$ de sorte que la condition p premier soit équivalente à dire que p est impair. La relation de congruence précédente devient alors $-a^p \equiv -a \pmod{p} \Leftrightarrow a^p \equiv a \pmod{p}$. Enfin, si $p = 2$, alors quelque soit a , l'entier $a^p - a$ est pair, et donc divisible par p . ■

3.3.5 Formule de Van der Monde

Proposition 2 : Pour tous entiers m, n et p tels que $p \leq m+n$, on a l'égalité

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}.$$

démonstration : Soit x un réel. Alors $(1+x)^m (1+x)^n = (1+x)^{m+n} = \sum_{p=0}^{m+n} \binom{m+n}{p} x^p$. Or

$$\begin{aligned} (1+x)^m (1+x)^n &= \left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i \right) \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j \right) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{i} \binom{n}{j} x^{i+j} \\ &= \left[\binom{m}{0} \binom{n}{0} \right] + \left[\left(\binom{m}{0} \binom{n}{1} + \binom{m}{1} \binom{n}{0} \right) x \right] + \left[\left(\binom{m}{0} \binom{n}{2} + \binom{m}{1} \binom{n}{1} + \binom{m}{2} \binom{n}{0} \right) x^2 \right] + \dots \\ &= \sum_{p=0}^{m+n} \left[\left(\sum_{\substack{i,j>0 \\ i+j=p}} \binom{m}{i} \binom{n}{j} \right) x^p \right]. \end{aligned}$$

Par identification des coefficients de ce polynôme de degré p , on obtient finalement que pour tout entier $p \in \{0, \dots, m+n\}$,

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{\substack{i,j>0 \\ i+j=p}} \binom{m}{i} \binom{n}{j} = \sum_{i=0}^p \binom{m}{i} \binom{n}{p-i}.$$

■