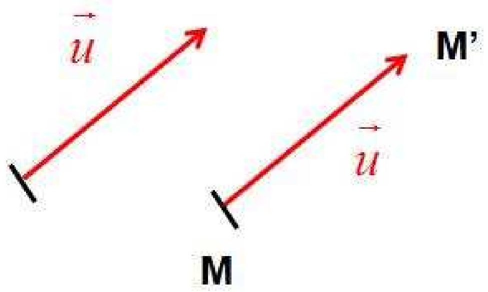
COURS SUR LES TRANSLATIONS ET HOMOTHETIES

Translations

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan

La translation du vecteur $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, est l'application qui à tout point M du plan ou de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$



Remarques

- La translation de vecteur nul est l'application identique, c'est-à-dire l'application qu'à tout point M associe le point M lui-même.

Autrement dit, si $\vec{u} = \vec{0}$, tout point M est invariant par la translation $t_{\vec{0}}$:
$t_{\vec{0}}(M) = M$

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ n'a aucun vecteur invariant.

Notion de transformation

Quelques points importants à retenir :

La transformation qui à chaque point M du plan on associe un unique point M' du plan est une application du plan dans lui même dans lui même.

M' est l'image de M par $t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}}(M) = M'$

Réciproquement, tout point M' du plan est l'image d'un unique point M.
Une telle application du plan dans lui-même dans lui-même assurant

cette correspondance « un à un » est appelée une **transformation.**

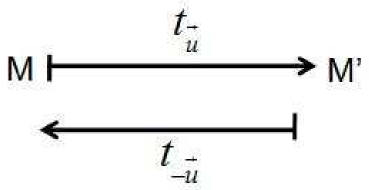
Notion de transformation réciproque

La transformation réciproque d'une transformation

$$f : M \mapsto M' = f(M)$$

est la transformation qui au point $M' = f(M)$ associe le point M.

La transformation réciproque de la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ est la translation $t_{-\vec{u}}$ de vecteur $-\vec{u}$.



Propriété fondamentale de la translation

Propriété

Si A' et B' sont les images respectives des points A et B par une translation, alors

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$$

Démonstration

Soient A et B deux points du plan ou de l'espace et soient A' et B' leurs images respectives par la translation de vecteur $\vec{u}$:

$A' = t_{\vec{u}}(A)$ et $B' = t_{\vec{u}}(B)$

Alors on a

$\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BB'} = \vec{u}$

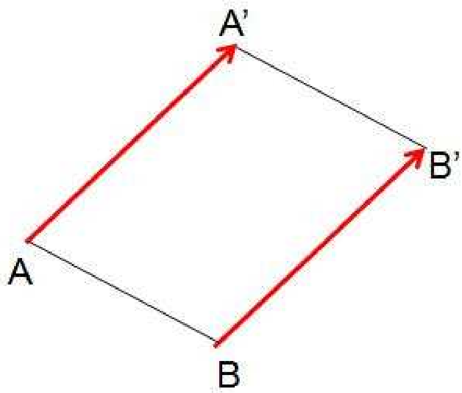
d'où $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$

On en déduit que AA'B'B est un Parallélogramme d'où

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$$

On aurait pu écrire en utilisant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'B'} &= \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} \\ &= -\vec{u} + \overrightarrow{AB} + \vec{u} \\ &= \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

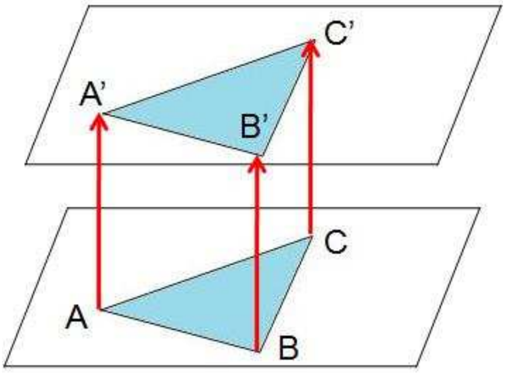


Translation et longueurs, aires et volumes

Propriété

Une translation du plan conserve les longueurs ou les aires..

On dit qu'une translation est une isométrie.
Elle transforme un triangle en un triangle isométrique et plus généralement une figure isométrique



Homothétie

Définition

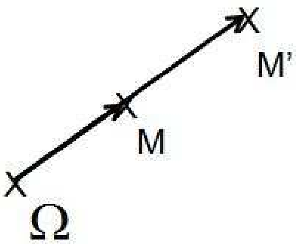
Soit Ω un point quelconque du plan ou et soit k un nombre réel non nul $(k \neq 0)$.

On appelle homothétie de centre $h_{\Omega,k}$ et de rapport k et on note $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ la transformation qui à pour tout point M du plan associe le point M'.

tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

Exemple

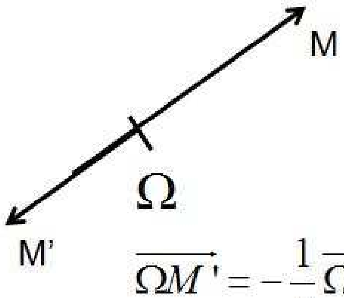
$k = 2$



$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$

$M' = h_{\Omega,2}(M)$

$k = -\frac{1}{2}$



$\overrightarrow{\Omega M'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega M}$

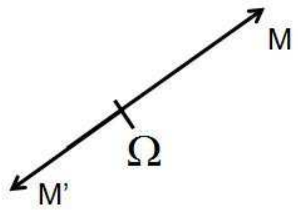
$M' = h_{\Omega,-\frac{1}{2}}(M)$

Remarques

- Si $k = 1$, alors, pour tout point M, on a $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$ donc M'=M

Tout point du plan est invariant et l'homothétie $h_{\Omega,1}$ est l'application identique.

- Si $k \neq 1$, le centre Ω de l'homothétie est le seul point invariant.
- Si $k = -1$, l'homothétie $h_{\Omega,-1}$ est la symétrie de centre Ω



$$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$$

Une première propriété des homothéties

Propriété

→ un point et son image par une homothétie sont alignés avec le centre de l'homothétie.

→ si P , Q , R sont trois points alignés, distincts deux à deux, il existe une homothétie, et une seule, de centre P et qui transforme Q en R .

Démonstration

→Soit M un point et soit M' son image par l'homothétie de centre Ω et de rapport k .

Alors on a

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

donc les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$ sont colinéaires et ont la même origine Ω donc les trois points Ω , M et M' sont alignés.

→Soit P , Q et R - trois points alignés et distincts deux à deux .

Alors les vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires et il existe un unique nombre réel $k \neq 0$ tel que $\overrightarrow{PR} = k\overrightarrow{PQ}$

→Soit h l'homothétie de centre $\mathbf{P}$ et de rapport k. L'homothétie h transforme $\mathbf{Q}$ en $\mathbf{R}$. ce qui prouve l'existence.

Supposons qu'une homothétie h' de centre $\mathbf{P}$ et de rapport λ transforme $\mathbf{Q}$ en $\mathbf{R}$.

Alors on a $\overrightarrow{PR} = \lambda \overrightarrow{PQ}$

et comme $\overrightarrow{PR} = k \overrightarrow{PQ}$
on en déduit que $\lambda = k$.

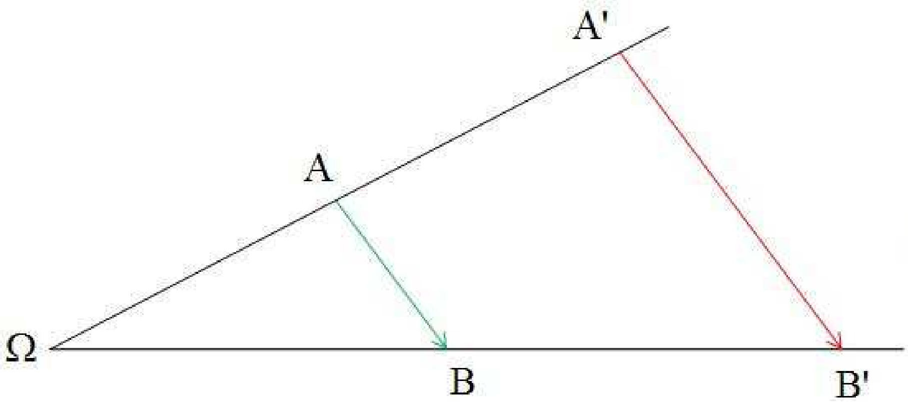
L'homothétie h' est donc l'homothétie h , ce qui prouve l'unicité.

Propriété fondamentale

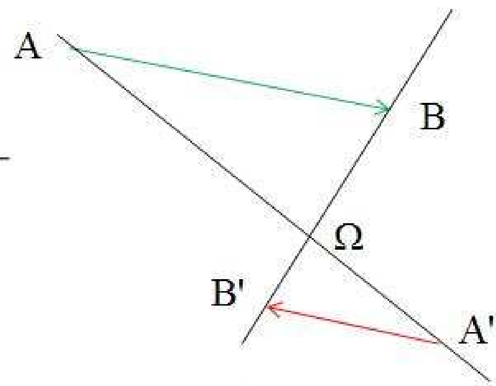
Propriété

Si A' et B' sont les images respectives de A et B par une homothétie de rapport , alors on a

$$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$$



$\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{A'B'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Démonstration

On a $\overrightarrow{\Omega A'} = k\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega B'} = k\overrightarrow{\Omega B}$.

On en déduit, en utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'\Omega} + \overrightarrow{\Omega B'} &= -\overrightarrow{\Omega A'} + \overrightarrow{\Omega B'} \\ &= -k\overrightarrow{\Omega A} + k\overrightarrow{\Omega B} \\ &= k\left(-\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B}\right) \\ &= k\left(\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega B}\right) \\ &= k\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Homothétie et longueurs, aires et volumes

Propriété

Une homothétie de rapport k. multiplie les longueurs par $|k|$, l'aire par k^2

Démonstration

Si A' et B' sont les images respectives de A et B par une homothétie de rapport k. , alors on a , d'après la propriété fondamentale,

$$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$$

d'où $\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| = \left\|k\overrightarrow{AB}\right\| = |k| \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

et les longueurs sont donc multipliées par $|k|$.

On admet que l'on peut en déduire que les aires sont multipliées par k^2

Translation, homothétie et alignement

Propriété

Une translation et une homothétie conservent l'alignement.

Autrement dit, les images par une translation ou une homothétie de points alignés sont des points alignés.

Démonstration

Soient A, B et C trois points alignés et deux à deux distincts et soient A', B' et C' leurs images respectives par la transformation f :
$A'=f(A)$, $B'=f(B)$ et $C'=f(C)$

Comme A, B et C sont alignés, il existe un nombre réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$

Démonstration

→Si f est une translation, on a ,

$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.

On en déduit $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{A'C'}$

c'est-à-dire $\overrightarrow{A'B'} = \lambda \overrightarrow{A'C'}$

donc les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ sont colinéaires
et les points A' , B' et C' sont alignés .

→Si f est une homothétie de rapport k , alors on a

$\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

d'où

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB} = k\left(\lambda\overrightarrow{AC}\right) &= (k\lambda)\overrightarrow{AC}\\ = \lambda\left(k\overrightarrow{AC}\right) &= \lambda\overrightarrow{A'C'}\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\overrightarrow{A'B'} = \lambda \overrightarrow{A'C'}$

donc les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ sont colinéaires et les points A' , B' et C' sont alignés .

Translation, homothétie et barycentre

Propriété

Une translation et une homothétie conservent le barycentre.

Autrement dit, si G est le barycentre de (A , a) et (B , b) , alors l'image G' de G par une translation ou une homothétie est le barycentre de (A' ,a) et (B' , b) où A' et B' sont les images respectives de A et de B.

Démonstration

Soient (A , a) et (B , b) deux points pondérés avec $a+b \neq 0$ et soit G le barycentre de (A , a) et (B , b)

Soient A' , B' et G' les images respectives de A , B et G par la transformation f

Comme G est barycentre de (A , a) et (B , b) , on a $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

→Si f est une translation, alors

$\overrightarrow{G'A'} = \overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{G'B'} = \overrightarrow{GB}$

donc $a\overrightarrow{G'A'} + b\overrightarrow{G'B'} = \vec{0}$.

→Si f est une homothétie de rapport k , alors

$\overrightarrow{G'A'} = k\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{G'B'} = k\overrightarrow{GB}$

d'où

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{G'A'} + b\overrightarrow{G'B'} &= a\left(k\overrightarrow{GA}\right) + b\left(k\overrightarrow{GB}\right) \\ &= k\left(a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB}\right) \\ &= k\vec{0} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

On a donc, dans les deux cas,

$$a\overrightarrow{G'A'} + b\overrightarrow{G'B'} = \vec{0}.$$

avec $a+b \neq 0$

On en déduit que G' est le barycentre de (A' ,a) et de (B' , b).

Remarque

• En particulier une translation ou une homothétie conserve le milieu :
Si I est le milieu de [AB] , son image est le milieu de [AB].

• Cette propriété de conservation du barycentre s’étend au barycentre de trois points ou plus.

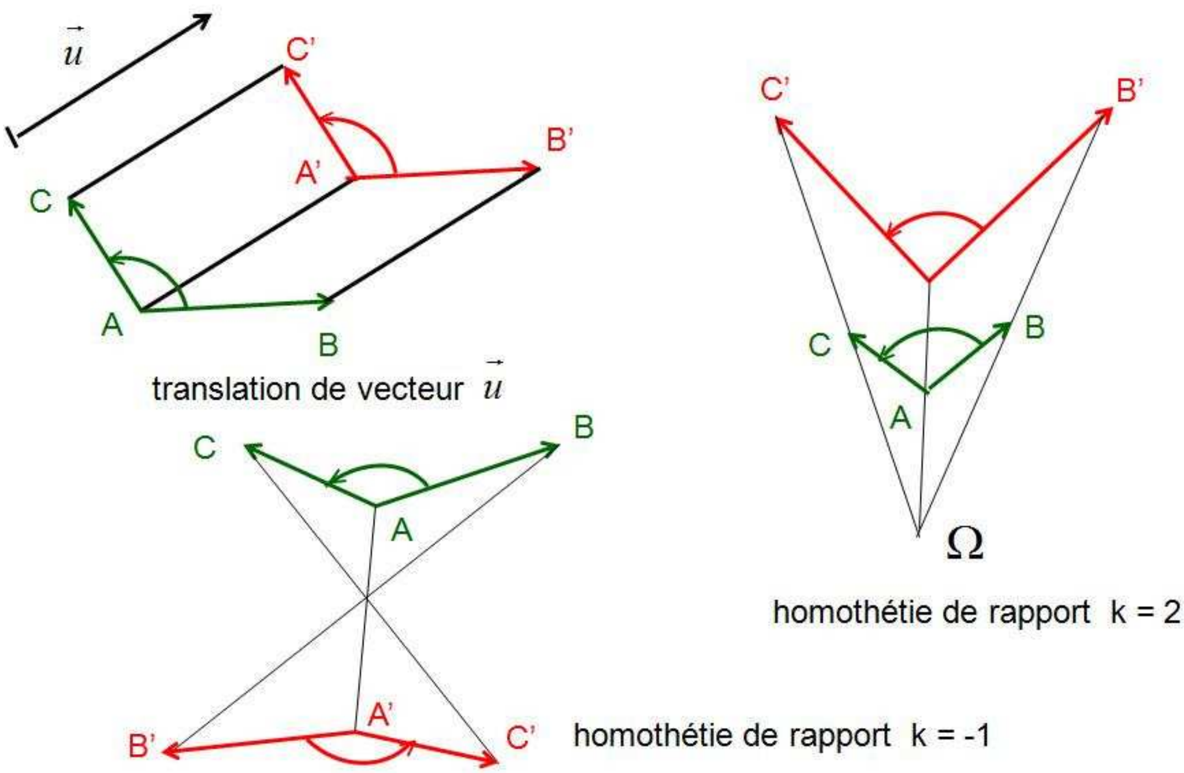
Translations, homothéties et angles

Propriété

Une translation et une homothétie conservent les angles géométriques et, dans le plan orienté, elles conservent les angles orientés.
Autrement dit, si A, B et C sont trois points deux à deux distincts et si A’, B’ et C’ sont leurs images respectives par une translation ou une homothétie, alors on a

$$\overline{B'A'C'} = \overline{BAC}$$

angles géométriques



Démonstration

Soient A , B et C trois points deux à deux distincts et soient A’ , B’ et C’ leurs images respectives par la transformation f .

→Si f est une translation, alors

$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. et $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$

donc $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$

et $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

→Si f est une homothétie de rapport k , alors

$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. et $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{AC}$

d’où $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(k\overrightarrow{AB}, k\overrightarrow{AC}\right)$.

Or $\left(k\overrightarrow{AB}, k\overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ (car $k \neq 0$)

d’après la propriété des angles orientés,

d’où $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

et $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$

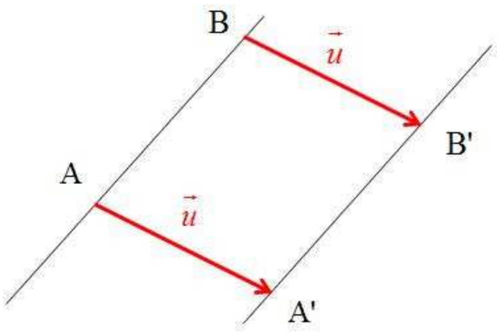
Image d’une droite ou d’un segment

Propriété

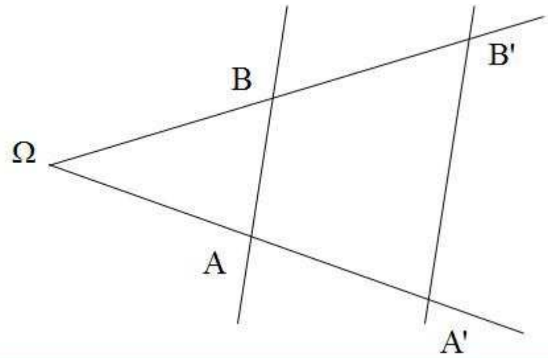
Soient A et B deux points distincts et soient A’ et B’ leurs images respectives par la translation ou une homothétie.

♦ L’image de la droite (A B) est la droite (A’ B’) , elle est parallèle à la droite (A B).

♦ L’image du segment [A B] est le segment [A’ B’].



Translation de vecteur $\vec{u}$



Homothétie de centre Ω et de rapport $k > 0.$

Démonstration

La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que

$\overrightarrow{AM} = x\ \overrightarrow{AB}$ lorsque x décrit $\mathbb{R}$.

Alors si A' , B' et C' sont les images respectives de

A , B et C par la transformation f (où f est une translation ou une homothétie), on a $\overrightarrow{A'M'} = x\ \overrightarrow{A'B'}$.

En effet,

Si f est une translation, alors

$\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.

Si f est une homothétie de rapport k, alors

$\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

Lorsque M décrit la droite (A B), x décrit $\mathbb{R}$ et le point M' décrit la droite (A' B') .

La droite (A B) a donc pour image la droite (A' B') .

De plus, on a

$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ si f est une translation
et

$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ si f est une homothétie.

Dans les deux cas, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires, donc les droites (AB) et (A'B') sont parallèles.

Le segment [AB] est l'ensemble des points M tels que

$\overrightarrow{AM} = x\ \overrightarrow{AB}$ avec $x \in [0,1]$

On a $\overrightarrow{A'M'} = x\ \overrightarrow{A'B'}$.

Donc lorsque M décrit le segment [A B] , x décrit [0, 1] et M' décrit le segment [A' B'] .

Le segment [A B] a donc pour image le segment [A' B']