# DÉRIVATION

## I) NOMBRE DÉRIVÉ

<u>Définition 1</u>

On dit qu'une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ contenant $a$ est <u>dérivable en $a$</u> s'il existe un réel $A$ tel que :

pour tout réel $h$ tel que $a + h \in I$ : $f(a + h) = f(a) + Ah + h\varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$

Le nombre $A$ s'appelle <u>nombre dérivé</u> de $f$ en $a$ ; on le note $f'(a)$.

<u>Exemple</u> :

La fonction $f$, définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x^2 + 3x - 4$ est-elle dérivable en $a$ ?

Pour le savoir, calculons $f(a + h)$ :

$$f(a + h) = (a + h)^2 + 3(a + h) - 4 = a^2 + 2ah + h^2 + 3a + 3h - 4 = a^2 + 3a - 4 + (2a + 3)h + h\times h$$

$$f(a + h) = f(a) + Ah + h\varphi(h) \text{ avec } A = 2a + 3 \text{ et } \varphi(h) = h \text{ (et on a bien } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0).$$

<u>Conclusion</u> : la fonction $f$ est dérivable pour tout réel $a$. Son nombre dérivé est $A = 2a + 3$.

<u>Exercices</u> : calculer (s'il existe) le nombre dérivé $A$ de la fonction "carré", d'une fonction affine $f(x) = mx + p$ et d'une fonction constante $f(x) = k$.

Le théorème suivant est un critère pour voir si une fonction est dérivable en $a$ (car ce n'est pas toujours facile de le vérifier avec la définition)

<u>Théorème 1</u>

Une fonction $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Sa valeur $A$ est alors le nombre dérivé de $f$ en $a$.

<u>Vocabulaire</u> : la quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ s'appelle l'<u>**accroissement moyen**</u> de $f$ entre $a$ et $a + h$.

(Ou encore le "taux de variation" ou "taux d'accroissement", selon les ouvrages)

<u>Exemple</u> : La fonction $f$ définie par $f(x) = x^3 - 7$ est-elle dérivable en $a = 2$ ?

Pour le savoir, évaluons la limite de la quantité suivante :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(2+h)^3-7-2^3+7}{h} = \frac{12h+6h^2+h^3}{h} = 12 + 6h + h^2$$

On simplifie d'abord l'expression avant d'étudier sa limite.

D'où : $$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 12$$

Donc $f$ est dérivable en $a = 2$, son nombre dérivé en 2 est $f'(2) = 12$.

<u>Exercice</u> :

Montrer que la fonction racine carré ($f : x \mapsto \sqrt{x}$ ) est dérivable en tout point de $]0 ; \infty[$ mais pas en 0.

Démonstration du théorème

Si $f$ est dérivable, l'accroissement moyen n'est autre, d'après la définition, que la quantité $A + \varphi(h)$.

Donc la limite de l'accroissement moyen (quand $h$ tend vers 0) est $A$ (puisque $\varphi(h)$ tend vers 0).

Réciproquement, si la limite de l'accroissement moyen existe et vaut $A$, alors il existe une fonction $\varphi$ qui tend vers 0 telle que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = A + \varphi(h)$, donc on a bien l'écriture $f(a + h) = f(a) + Ah + h\varphi(h)$.

## II) INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU NOMBRE DÉRIVÉ

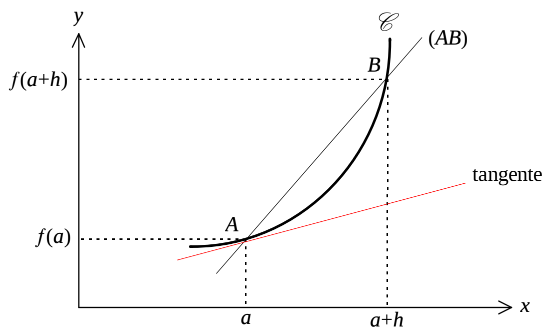
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative d'une fonction $f$ dérivable en $a$.

On considère le point $A(a\ ;\ f(a))$ et le point $B(a + h\ ;\ f(a + h))$.

Le coefficient directeur de la droite $(AB)$ est :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Lorsque le point $B$ s'approche du point $A$ (lorsque $h$ tend vers 0), le coefficient directeur de $(AB)$ tend vers le nombre dérivé $f'(a)$ et la droite $(AB)$ devient tangente à $\mathscr{C}$ (un seul point de contact).




Propriété

Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A$ d'abscisse $a$.

Équation de la tangente :

On a $f'(a) = \dfrac{y - f(a)}{x - a}$ pour tout point $M(x\ ;\ y)$ de la tangente à $\mathscr{C}$ en $A$, ce qui nous en donne une équation :

$$y = f(a) + f'(a)\,(x - a)$$

## III) FONCTION DÉRIVÉE

Nous avons vu dans un exemple précédent, que la fonction $f$ définie par $f(x) = x^2 + 3x - 4$ est dérivable pour tout réel $a$ et que son nombre dérivé en $a$ est $A = f'(a) = 2a + 3$. Il est donc naturel de définir une nouvelle fonction qui à $x$ associe le nombre dérivé $f'(x)$. **Cette fonction s'appelle la dérivée de $f$ et se note $f'$.**

La dérivée de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 3x - 4$ est donc $f' : x \mapsto 2x + 3$.

Définition 2

On dit qu'une fonction $f$ est dérivable sur un intervalle $I$ lorsqu'elle est dérivable en tout point de cet intervalle.

## Tableau des dérivées des fonctions usuelles

| Fonction $f$ | Fonction dérivée $f'$ | définie sur |
|---|---|---|
| $f(x) = k$ (constante) | $f'(x) = 0$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = ax + b$ | $f'(x) = a$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^n$ $(n \geqslant 1)$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ $(n \geqslant 1)$ | $f'(x) = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]\,0\,;+\infty\,[$ |

## Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un inverse, d'un quotient

Dans le tableau ci-dessous, $u$ et $v$ sont deux fonctions définies sur un même intervalle $I$

| Fonction | Fonction dérivée | Exemple |
|---|---|---|
| $u + v$ | $u' + v'$ | Si $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ alors $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ |
| $uv$ | $u'v + uv'$ | Si $f(x) = x\sqrt{x}$ alors $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ |
| $u^n$ | $nu'u^{n-1}$ | Si $f(x) = (3x^2 - 2)^5$ alors $f'(x) = 5(6x)\,(3x^2 - 2)^4 = 30x(3x^2 - 2)^4$ |
| $\dfrac{1}{v}$ | $-\dfrac{v'}{v^2}$ | Si $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ alors $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2 - 1)^2}$ |
| $\dfrac{u}{v}$ | $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ | Si $f(x) = \dfrac{2x+3}{4x-4}$ alors $f'(x) = \dfrac{2(4x-4) - 4(2x+3)}{(4x-4)^2} = \dfrac{-20}{(4x-4)^2}$ |

## Dérivée des fonctions de la forme $f(x) = g(ax + b)$

On admettra le résultat suivant :

$$\boldsymbol{f'(x) = a\,g'(ax + b)}$$

Exemple : Soit la fonction $f$ définie sur $[\dfrac{1}{3}\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3x-1}$. Comment la dériver ?

On remarque que $f$ peut s'écrire $f(x) = g(3x - 1)$ où $g(t) = \sqrt{t}$ .

Or, pour tout $t > 0$, on a : $g'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ , donc $f'(x) = a\,g'(ax + b) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$ pour tout $x > \dfrac{1}{3}$.

Exercice : À l'aide des résultats ci-dessus, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = (x^2 + x + 1)^2$

2) $f(x) = (x - 1)^2(3 - x)^3$

3) $f(x) = (x - 1)^4(x + 1)^4$

4) $f(x) = x^3(1 + \sqrt{x})$

5) $f(x) = 4x^2\sqrt{x}$

6) $f(x) = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$

7) $f(x) = \left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)\left(x + \sqrt{x}\right)$

8) $f(x) = \sqrt{2-x}$