6. Fonctions trigonométriques

6.1. Fonctions périodiques et fonctions trigonométriques

Les traces les plus anciennes d'utilisation de sinus apparaissent dans le *Sulba Sutras* écrit en indien ancien dans la période du 8ème siècle av. J.-C. au 6ème siècle av. J.-C.
Les fonctions trigonométriques furent plus tard étudiées par Hyppârque de Nicée (185-125 av. J.-C.), Âryabhata (476-550), Varahamihira, Brahmagupta, Muhammad ibn Musa al-Khuwarizmi, Abu l-Wafa, Omar Khayyam, Bhaskara II, Nasir ad-Din at-Tusi, Regiomontanus (1464), Al-Kachi (14ème siècle), Ulugh Beg (14ème siècle), Madhava (1400), Rheticus et son disciple Valentin Otho. L'ouvrage *Introductio in analysin infinitorum* (1748) de Leonhard Euler fut en grande partie à l'origine des considérations analytiques des fonctions trigonométriques en Europe.

On peut trouver une analogie entre les fonctions périodiques et la tapisserie. En effet, on peut construire une fonction périodique en juxtaposant des bouts de la fonction de largeur *p*, exactement comme on le fait pour couvrir un mur avec des rouleaux de tapisserie. Le même motif réapparaît périodiquement.

Toutes les fonctions trigonométriques sont périodiques.

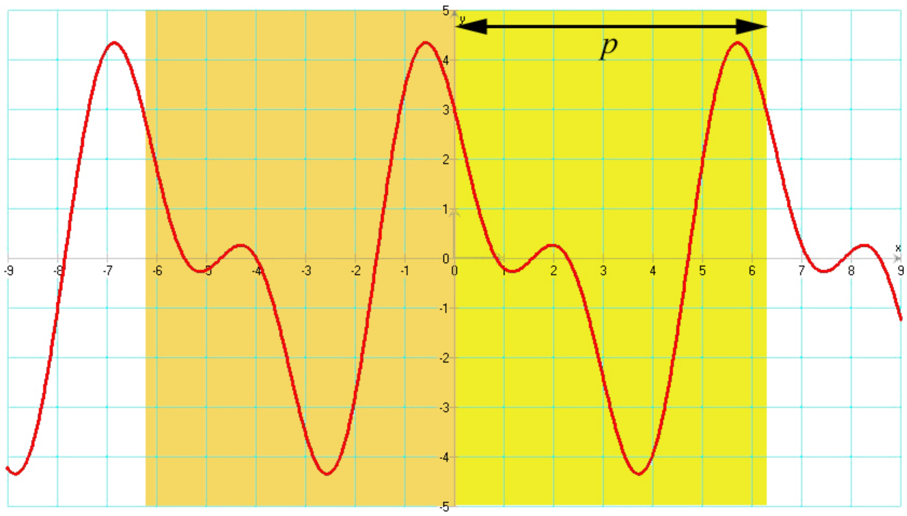
Bon nombre de processus qui se produisent dans la nature sont aussi périodiques : le niveau d'eau d'un bassin de marée, la pression sanguine du cœur, le courant alternatif et la position des molécules d'air qui transmettent un son, par exemple. On peut représenter de tels phénomènes par des fonctions trigonométriques.
Les fonctions trigonométriques peuvent se définir à partir du cercle trigonométrique (cercle de rayon 1 centré à l'origine), définition qui les rend périodiques.

Une fonction f de la variable x définie sur D $(D \subset \mathbb{R})$ est dite **périodique** si, quel que soit x, il existe un nombre réel p tel que :

$$(x+p) \in D \text{ et } f(x+p) = f(x)$$

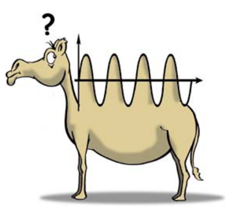
Le plus petit nombre réel positif p satisfaisant à cette condition est appelé **période** de f.

Exemple : $f(x) = 3\cos(x) - 2\sin(2x)$



L'unité des *x* est <u>toujours</u> le radian !

Glossaire



Fonction sinusoïdale : Fonction dont le graphique « ressemble » au graphique de la fonction sinus ; fonctions sinus et cosinus et toutes leurs formes qui ont subi des translations, des étirements ou des compressions.
Amplitude : Distance entre la moyenne d'une fonction sinusoïdale et sa valeur maximale ; moitié de la distance entre le minimum et le maximum d'une fonction sinusoïdale.
Déphasage : Translation horizontale d'une fonction sinusoïdale.

Fonction sinus

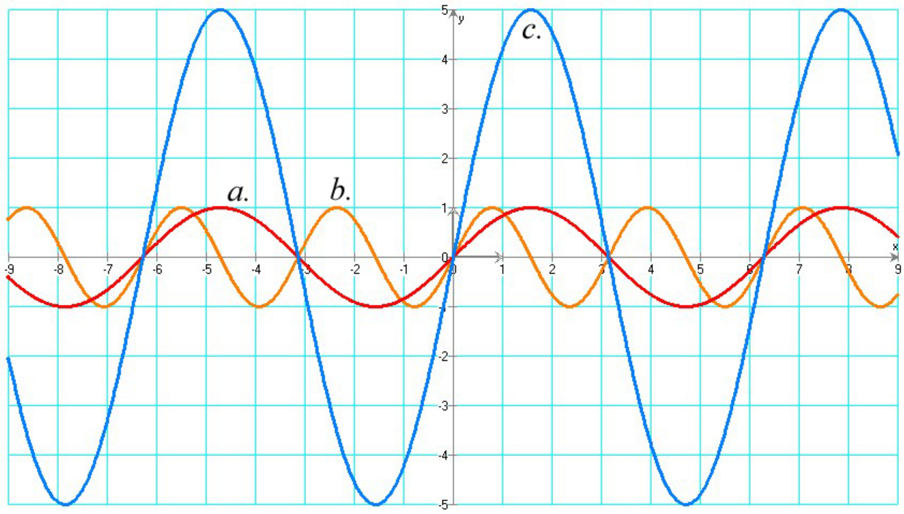
La fonction sinus varie entre -1 et 1. C'est une fonction bornée.
La période de la fonction $\sin(x)$ est 2π.
La fonction sinus est une fonction impaire : pour tout réel x on a $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Sur l'axe des x, les angles sont en radians.

a. En rouge : $\sin(x)$

b. En orange : $\sin(2x)$

c. En bleu : $5\sin(x)$



En utilisant le cercle trigonométrique, pouvez-vous expliquer la forme de cette courbe, ainsi que la longueur de sa période ?

Fonction cosinus

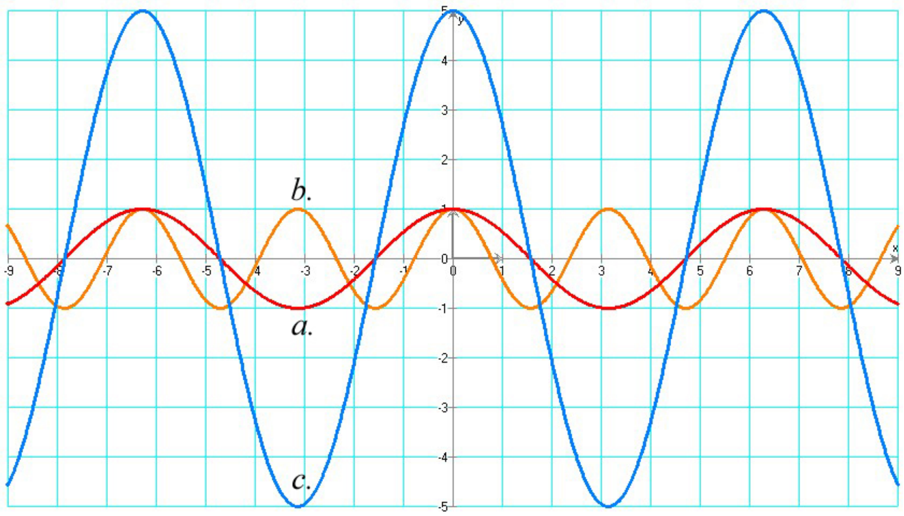
La fonction cosinus varie entre -1 et 1. C'est une fonction bornée.
La période de la fonction $\cos(x)$ est 2π.
La fonction cosinus est une fonction paire : pour tout réel x on a $\cos(-x) = \cos(x)$.

Sur l'axe des x, les angles sont en radians.

a. En rouge : $\cos(x)$

b. En orange : $\cos(2x)$

c. En bleu : $5\cos(x)$



En utilisant le cercle trigonométrique, pouvez-vous expliquer la forme de cette courbe, ainsi que la longueur de sa période ?

Remarquez que la fonction cosinus est décalée de $\frac{\pi}{2}$ vers la gauche par rapport à la fonction sinus.

Exercice 6.1

Vous pouvez aussi utiliser un ordinateur pour tracer ces courbes.

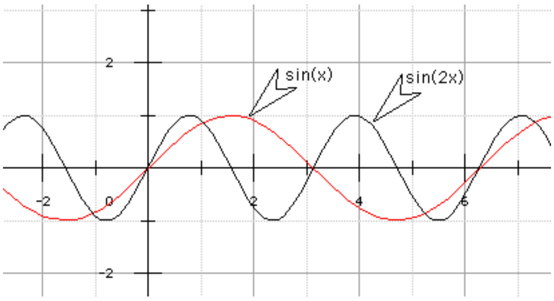
Une fonction sinusoïdale est donnée par la formule $f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$.

Dessinez le graphe des fonctions suivantes et constatez les effets de a, b, c et d :

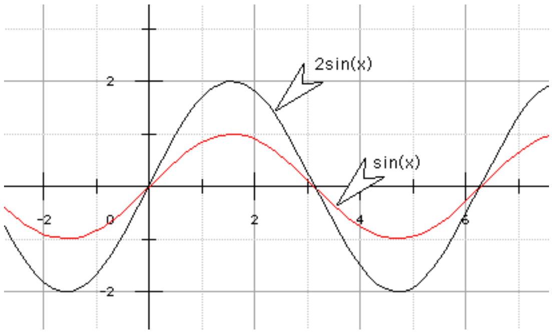
a. $\sin(2x)$ **b.** $2\sin(x)$ **c.** $-3\sin(x)$

d. $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **e.** $\sin(2x - 1)$ **f.** $3 + \sin(x)$

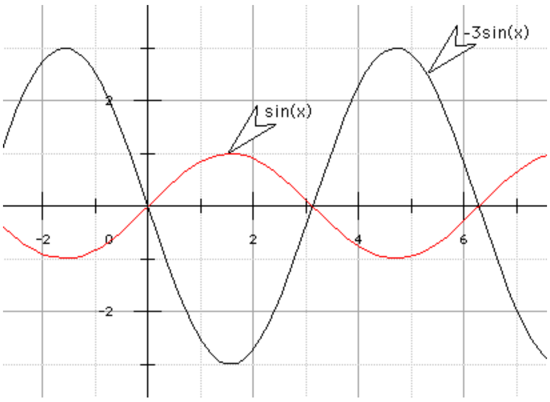
Solution de l'exercice 6.1



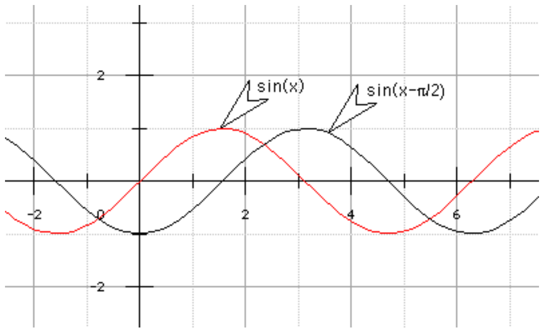
a. Par rapport à sin(x), la **période** de sin($2x$) est divisée par 2. D'une manière générale, la période de la fonction sin(bx) est de $\frac{2\pi}{b}$.



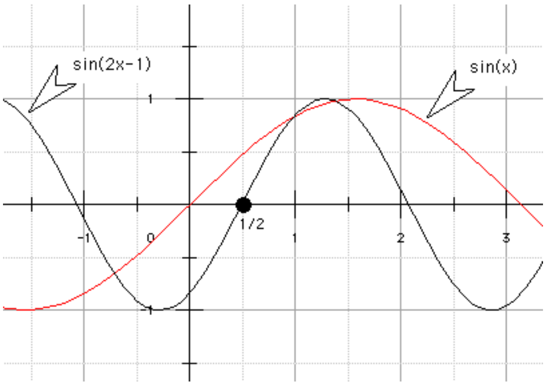
b. L'**amplitude** de sin(x) est 1 (la moyenne est 0 et le maximum 1). L'amplitude de 2·sin(x) est 2 . On voit donc que l'amplitude de la fonction a·sin(x) est $|a|$.



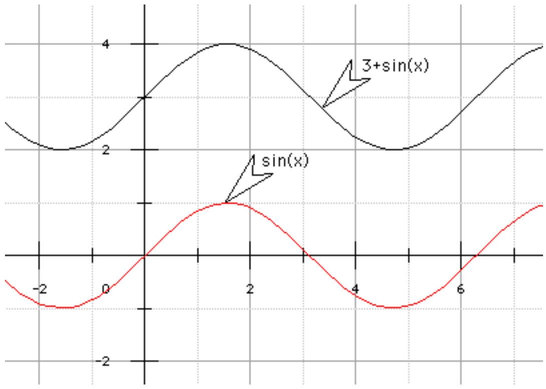
c. L'amplitude de –3sin(x) est de 3. Le signe « – » provoque un « effet miroir » par rapport à l'axe des x.



d. La courbe de sin(x - π/2) est décalée de π/2 vers la droite. D'une manière générale, la fonction sin(x – c) (c > 0) est décalée de c vers la droite par rapport à sin(x). Par contre, sin(x + c) (c > 0) est décalée de c vers la gauche par rapport à sin(x).



e. D'une manière générale, sin(bx + c) « commence » à $-\frac{c}{b}$. Il en va de même pour les fonctions du type a·sin(bx+c)+d. Ci-dessus, avec b = 2 et c = –1, la fonction sin(2x–1) commence à $\frac{1}{2}$.



f. Par rapport à sin(x), 3+sin(x) est décalée de 3 vers le haut. D'une manière générale, une fonction sin(x)+d est décalée de d vers le haut (vers le bas si d est négatif). On dit que d est la valeur moyenne.

Guesmi.B

Exercice 6.2

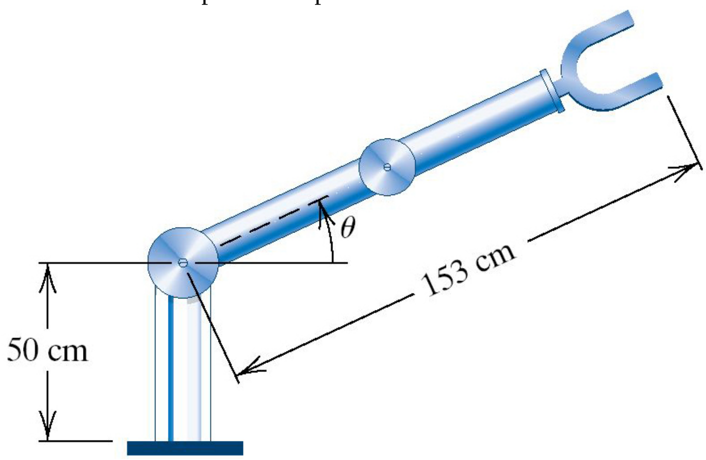
Les fonctions trigonométriques sont utilisées pour la conception de robots industriels.

Supposons que l'articulation de l'épaule d'un robot soit motorisée de façon à ce que l'angle θ augmente à une vitesse constante de $\pi/12$ radians par seconde à partir d'un angle initial $\theta = 0$. Supposons que l'articulation du coude est maintenue rigide et que le bras a une longueur constante de 153 centimètres, comme sur la figure.

a. Supposez que h = 50 cm si $\theta = 0$. Construisez le tableau qui énumère l'angle θ et la hauteur h de la main du robot chaque seconde lorsque $0 \le \theta \le \pi/2$.

b. Déterminez si une augmentation constante de l'angle θ entraîne une augmentation constante de la hauteur de la main.

c. Trouvez la distance totale parcourue par la main.



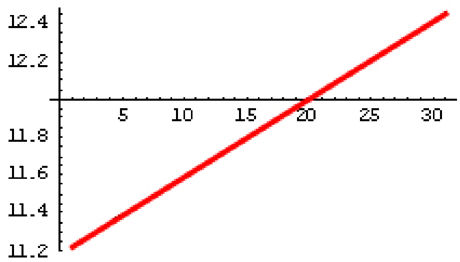
Exercice 6.3

À Madrid, la longueur du jour D (exprimée en heures) est donnée en fonction de la date par la formule approchée :

$$D(t) = 12 + 2.4\cdot\sin(0.0172\,(t - 80))$$

où t est le numéro du jour depuis le début de l'année.

La figure ci-dessous montre le graphe de D durant un mois de l'année. On a en abscisse le nombre de jours écoulés depuis le début du mois en question, et en ordonnée la durée du jour en heures.



a. Pourquoi le graphe apparaît-il comme une ligne droite, bien que ce soit une fonction sinus ?

b. Quel mois montre le graphe ?

c. Quelle est la pente approximative de cette « droite » ?
Que représente cette pente ?

d. Quelle était la durée du jour le 23 mai 2007 ?

Exercice 6.4

L'évolution de la population P d'une harde de cerfs est modélisée par la fonction :

$$P(t) = 4000 + 500\cdot\sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$ où t est mesuré en années.

a. Dessinez le graphe de $P(t)$ pour un an.

b. Quand dans l'année la population est-elle à son maximum ? Quelle est la population à ce moment-là ?

c. Y a-t-il un minimum ? Si oui, quand ?

d. Quelle est la période de la fonction $P(t)$?

Guesmi.B

Exercice 6.5

Le principe des biorythmes fait appel aux graphiques de trois fonctions sinus élémentaires pour prédire le potentiel physique, émotionnel et intellectuel d'un individu pour un jour donné. Ces graphiques sont donnés sous la forme $y = \sin(b \cdot t)$, pour t en jours, avec $t = 0$ correspondant à la date de naissance. Une valeur $y = 1$ indique un potentiel de 100%.

a. Trouvez la valeur de b pour le cycle physique, qui a une période de 23 jours ; pour le cycle émotionnel (période de 28 jours) ; pour le cycle intellectuel (période de 33 jours).
b. Calculez les trois potentiels d'une personne âgée de 7670 jours (21 ans).
c. Les potentiels sont une 1ère fois tous à 0 quand $t = 0$. Quand seront-ils à nouveau tous les trois à 0 pour la 2ème fois ?

Exercice 6.6

On calcule la variation annuelle de température T (en °C) à Ottawa, au Canada, par

$$T(t) = 15.8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) + 5$$

où t représente le temps en mois et $t = 0$ correspond au 1er janvier.

a. Représentez graphiquement $T(t)$ pour $0 \leq t \leq 12$.
b. Déterminez la température maximale de l'année et la date à laquelle cela se produit.

Exercice 6.7

Inspirez-vous de vos constatations de l'exercice 1.

Les scientifiques utilisent parfois la formule

$$f(t) = a \sin(b \cdot t + c) + d$$

pour simuler les variations de température durant le jour, avec le temps t exprimé en heures, la température $f(t)$ en °C et $t = 0$ correspondant à minuit. Supposons que f soit décroissante à partir de minuit.
Soient les deux cas suivants :

a. La température maximale est de 10°C, et la température minimale de −10°C survient à 4 heures du matin.
b. La température varie entre 10°C et 30°C, et la température moyenne de 20°C survient pour la première fois à 9 heures du matin.

Guesmi.B

Déterminez les valeurs de a, b, c et d qui décrivent ces informations. Représentez graphiquement f pour $0 \leq t \leq 24$.

Exercice 6.8

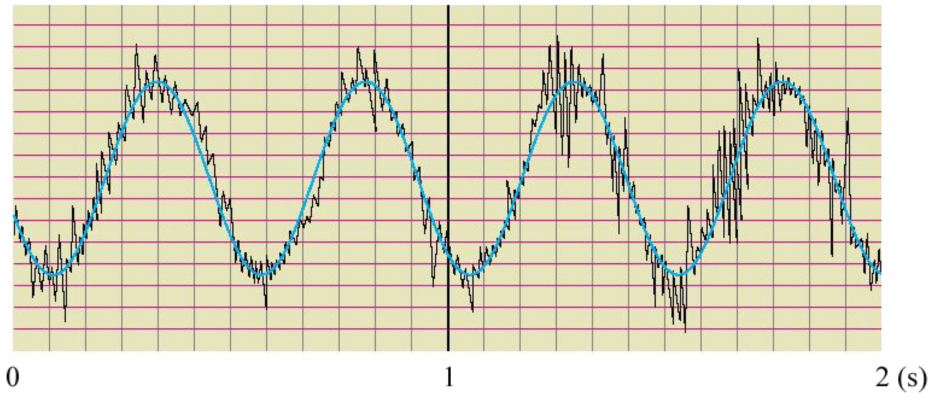
Lorsqu'un fleuve se jette dans l'océan, la profondeur de ce fleuve varie en fonction des marées. Le tableau suivant donne la profondeur (en m) de la Tamise, à Londres, sur une durée de 24 heures.

Heure	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Profondeur	8.1	9.0	9.9	10.3	10.1	9.3	8.1	7.0	6.0	5.4	5.5	6.2
Heure	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Profondeur	7.3	8.4	9.5	10.1	10.2	9.7	8.7	7.6	6.6	5.9	5.6	5.9

a. Reportez les données sur un graphique avec le temps sur l'abscisse et la profondeur sur l'ordonnée.
b. Déterminez une fonction $P(t) = a \sin(b \cdot t + c) + d$ approchant les données du tableau.
c. Si un bateau a besoin d'au moins 7 m d'eau pour naviguer en toute sécurité sur la Tamise, déterminez graphiquement les intervalles de temps pendant lesquels la navigation n'est pas sûre.

Exercice 6.9

La figure montre un encéphalogramme de l'activité du cerveau humain pendant le sommeil profond. Si on utilise $W = a \cdot \sin(b \cdot t + c)$ pour représenter ces ondes, quelle est la valeur de b ?



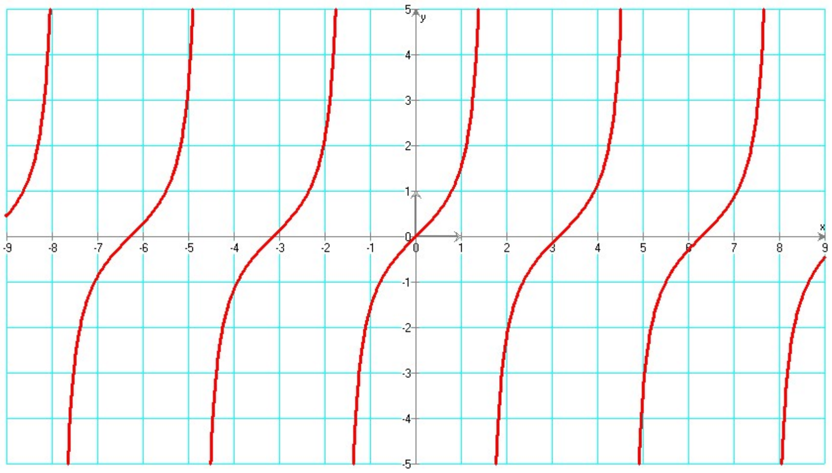
Fonction tangente

La fonction tangente varie entre $-\infty$ et $+\infty$. C'est une fonction non bornée.

La période de la fonction $\tan(x)$ est π.

La fonction tangente est une fonction impaire : pour tout réel x on a $\tan(-x) = -\tan(x)$.

En utilisant le cercle trigonométrique, pouvez-vous expliquer la forme de cette courbe, ainsi que la longueur de sa période ?



Guesmi.B

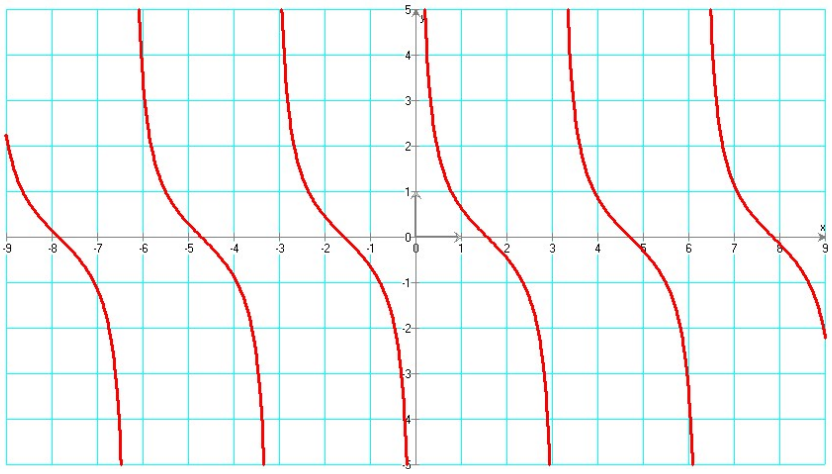
Fonction cotangente

La fonction cotangente varie entre $-\infty$ et $+\infty$. C'est une fonction non bornée.

La période de la fonction $\cot(x)$ est π.

La fonction cotangente est impaire : pour tout réel x on a $\cot(-x) = -\cot(x)$.

En utilisant le cercle trigonométrique, pouvez-vous expliquer la forme de cette courbe, ainsi que la longueur de sa période ?



6.2. Équations trigonométriques

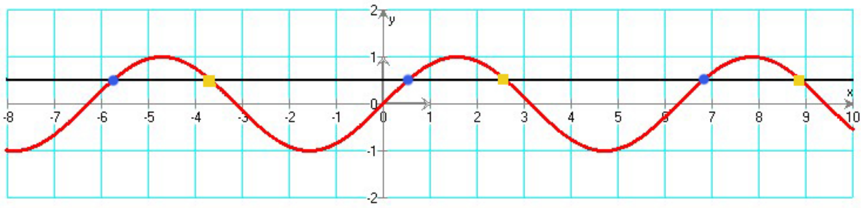
On appelle **équation trigonométrique** toute équation comportant des fonctions trigonométriques de l'inconnue (ou des inconnues). Rappelons que l'on travaille toujours en radians !

Il y a donc une infinité de solutions !

Pour résoudre une équation du type **sin(*u*) = *c***, avec $|c| \le 1$, on utilise l'équivalence :

$\sin(u) = c \iff u = \arcsin(c) + 2k\pi$ **ou** $u = \pi - \arcsin(c) + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

Illustration Le schéma ci-dessous montre les intersections de la courbe de sin(x) avec la droite horizontale $y = 0.5$. On voit qu'il y a deux familles de solutions (les ronds bleus et les carrés orange), chaque famille comprenant une infinité de solutions.



Pour résoudre une équation du type **sin(*u*) = sin(*v*)**, on utilise l'équivalence :

$\sin(u) = \sin(v) \iff u = v + 2k\pi$ **ou** $u = \pi - v + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

Pour résoudre une équation du type **cos(*u*) = *c***, avec $|c| \le 1$, on utilise l'équivalence :

Faites un schéma qui montre les intersections de la courbe de cos(x) avec la droite horizontale $y = -0.5$.

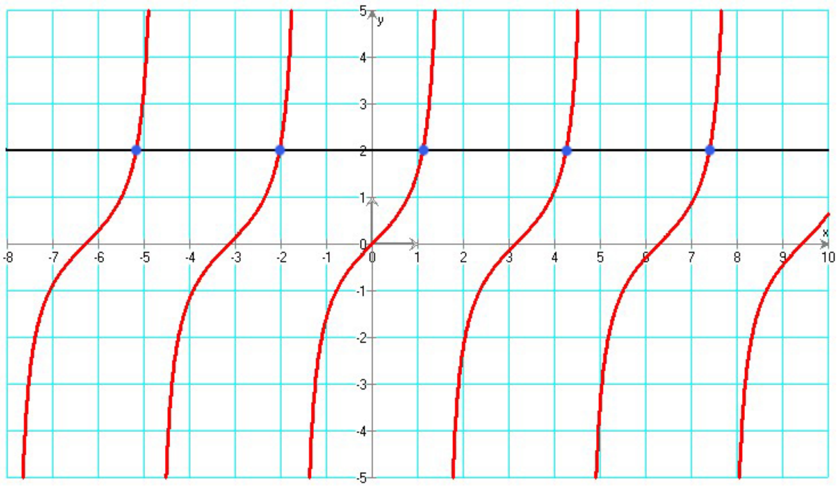
$\cos(u) = c \iff u = \arccos(c) + 2k\pi$ **ou** $u = -\arccos(c) + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

Pour résoudre une équation du type **cos(*u*) = cos(*v*)**, on utilise cette équivalence :

$\cos(u) = \cos(v) \iff u = v + 2k\pi$ **ou** $u = -v + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

Avec les fonctions tangente et cotangente, il n'y a qu'une seule famille de solutions.

Guesmi.B



Pour résoudre une équation du type **tan(*u*) = *c***, on utilise l'équivalence :

$\tan(u) = c \iff u = \arctan(c) + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

Pour résoudre une équation du type **tan(*u*) = tan(*v*)**, on utilise cette équivalence :

$\tan(u) = \tan(v) \iff u = v + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

Faites un schéma qui montre les intersections de la courbe de $\cot(x)$ avec la droite horizontale $y = -3$.

Pour résoudre une équation du type $\mathbf{cot(u) = c}$, on utilise l'équivalence ci-dessous :

$\cot(u) = c \Leftrightarrow u = \text{arccot}(c) + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

Pour résoudre une équation du type $\mathbf{cot(u) = cot(v)}$, on utilise l'équivalence ci-dessous :

$\cot(u) = \cot(v) \Leftrightarrow u = v + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 6.10

Résolvez les équations suivantes (en radians) :

a. $\sin(3t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$

b. $\tan\left(\frac{2\pi}{3} - t\right) = \tan(2t)$

c. $\cos\left(\frac{2t}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{3t}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

Exercice 6.11

Une difficulté sera de vérifier que votre manière d'écrire la solution correspond à la solution du corrigé...

Donnez **toutes** les solutions des équations suivantes :

Travaillez en radians	*Travaillez en degrés*
a. $\cos(t) = -0.5$	**b.** $\sin(t) = 0.8473$
c. $\cot(t) = -0.5773$	**d.** $\tan(t) = -0.9042$
e. $\sin(3t) = -0.866$	**f.** $\tan(5t) = 3.492$
g. $\sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$	**h.** $\cos\left(\frac{2t}{3} - 45^\circ\right) = -\frac{1}{2}$

Énumérez les solutions de l'équation **a**. comprises dans l'intervalle $[-2\pi , 2\pi]$.

Exercice 6.12

Résolvez les équations suivantes (en radians) :

a. $\cos^2(t) = \frac{1}{4}$

b. $2\cos^2(t) - 3\cos(t) + 1 = 0$

c. $\sin(x) = \cos(x)$, et représentez sur le cercle trigonométrique les solutions de cette équation comprises entre 0 et 2π.

Exercice 6.13

Le but de cet exercice est de tracer sur une carte du monde la ligne de partage entre le jour et la nuit.

Au moment précis où le Soleil se lève à Porrentruy, il se lève évidemment aussi ailleurs. Mais où précisément ? Pour le savoir, on va utiliser la formule suivante, **valable pour tous les lieux où le Soleil se lève au même instant** :

$$\boxed{\cos(h - \lambda) = -\tan(\delta)\tan(\phi)} \quad (*)$$

Cette formule relie quatre nombres, h, λ, δ et ϕ, tous exprimés en degrés :

- λ et ϕ sont les coordonnées géographiques du lieu :

λ est la *longitude*, comptée positivement vers l'Est et négativement vers l'Ouest
ϕ est la *latitude*, comptée positivement vers le Nord et négativement vers le Sud

- h et δ ne dépendent pas du lieu, mais de la date :

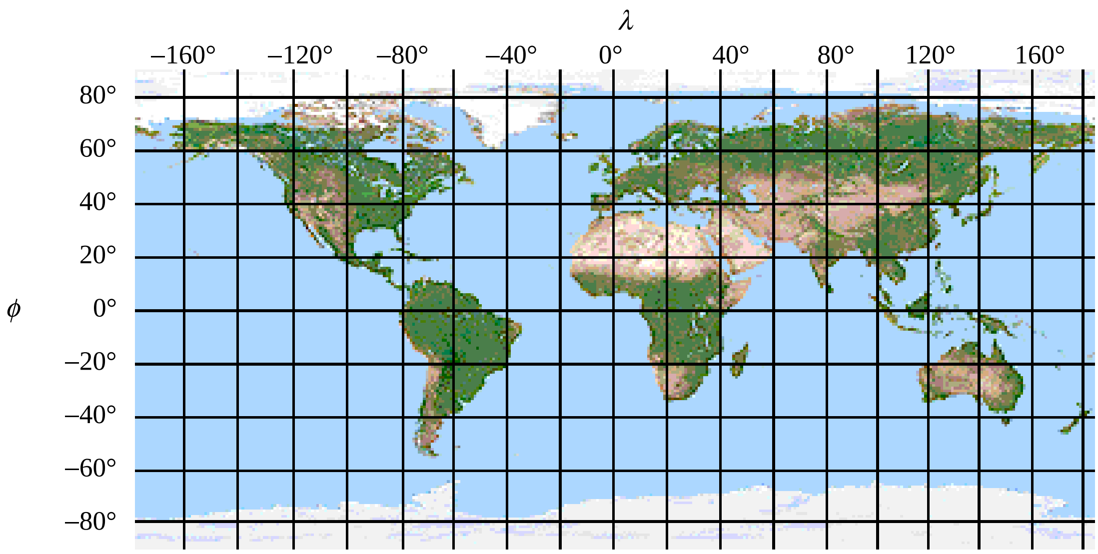
h est *l'angle horaire*, qui dépend de l'heure qu'il est à Greenwich
δ est la *déclinaison* du Soleil, qui varie au cours de l'année.

(la déclinaison est l'une des deux coordonnées équatoriales permettant de repérer la position d'un point sur la sphère céleste, analogue à la latitude sur la Terre)

Le 21 juin, à 5h38 (heure locale, horaire d'été)

Le Soleil se lève à Porrentruy (λ = 7°05' E; ϕ = 47°25' N). Ce jour-là, la déclinaison vaut δ = 23.44°.

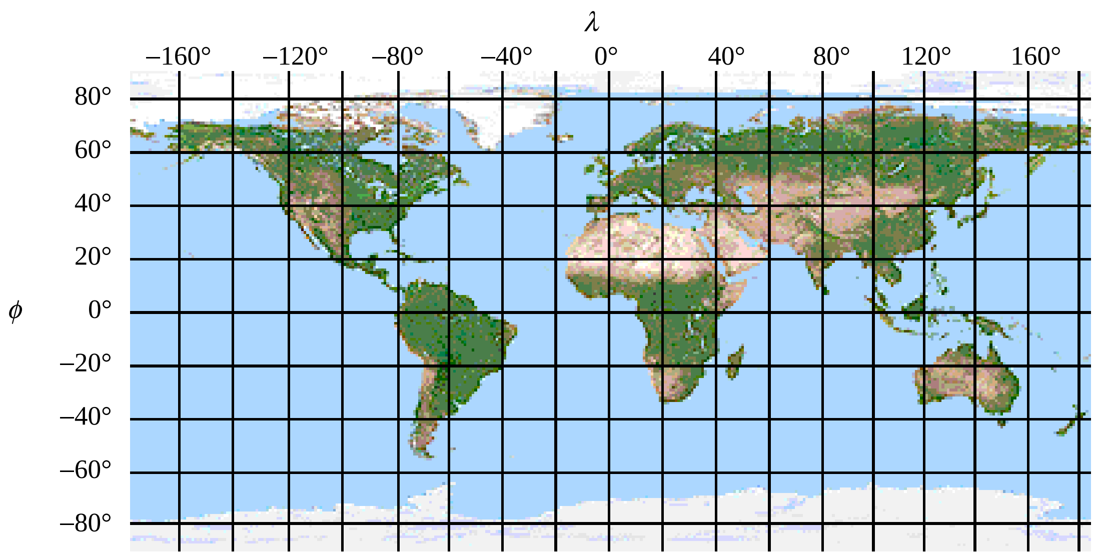
1. **Détermination de *h* :** à l'aide de la formule (*), déterminez avec votre calculatrice la valeur de *h*.
2. **Calcul de longitudes :** à l'aide de la formule (*), déterminez avec votre calculatrice la valeur de λ à partir de celles de *h*, δ et ϕ, pour des latitudes ϕ = –60°, –50°, –40°, ..., 50°, 60°.
3. **Tracé de la courbe :** tracez sur la carte ci-dessous les points de coordonnées (λ ; ϕ), et reliez-les par une courbe.



4. **Prolongement de la courbe :** cherchez par le calcul à prolonger la courbe à des points de latitude supérieure à 60°, ou inférieure à –60°.
5. **Fermeture de la courbe :** quelle est, sur le globe terrestre, la forme de la frontière entre le jour et la nuit ? Que se passe-t-il aux antipodes quand le Soleil se lève à Porrentruy ?
   Comment faut-il compléter la courbe pour obtenir la frontière entre le jour et la nuit ? Comment calculer les points manquants ? Assombrissez la partie de la Terre plongée dans la nuit.

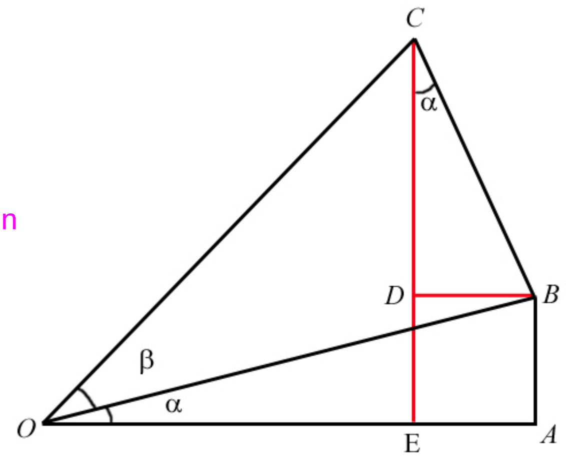
Le 10 novembre, à 7h28 (heure locale, horaire d'hiver)

À cette heure-là, le Soleil se lève à Porrentruy.
Ce jour-là, la déclinaison vaut δ = –16.93°.
Refaites les points 1 à 5 de la première situation en utilisant le dessin ci-dessous.



6.3. Relations trigonométriques

Il s'agit d'établir des relations qui permettront de résoudre des équations impliquant des fonctions trigonométriques différentes.
Le dessin ci-dessous va nous servir à établir une relation pour $\sin(\alpha+\beta)$. Toutes les autres relations découleront de celle-là.



$$\overline{DE}=\overline{AB}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\overline{CD}+\overline{DE}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}+\frac{\overline{DE}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}\cdot\frac{\overline{CB}}{\overline{CB}}+\frac{\overline{DE}}{\overline{OC}}\cdot\frac{\overline{OB}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{OC}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{CB}}+\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$$

$$=\sin\beta\cdot\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta \quad\Rightarrow\quad \sin(2\alpha)=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin(\alpha)\cdot\cos(-\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(-\beta)$, ce qui implique :

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\sin\left(\alpha+\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$=\sin\alpha\cdot\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\alpha\cdot\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\sin\alpha\cdot(-\sin\beta)+\cos\alpha\cdot\cos\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta \quad\Rightarrow\quad \cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)$$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+(-\beta))=\cos(\alpha)\cdot\cos(-\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(-\beta)$, ce qui implique :

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cdot\cancel{\cos\beta}}+\dfrac{\cancel{\cos\alpha}\cdot\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha}\cdot\cancel{\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha}\cdot\cancel{\cos\beta}}-\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} \quad\Rightarrow\quad \tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan(\alpha+(-\beta))=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(-\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$, ce qui implique :

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Il existe beaucoup d'autres formules que vous trouverez dans les formulaires mathématiques ou sur le web.

Problème résolu

Résoudre $2\sin^2(x)+\sqrt{3}\sin(2x)=3$

L'idée est de s'arranger pour n'avoir plus qu'un seul type de fonction trigonométrique (éventuellement élevée à une puissance), par exemple sin(*x*).

$2\sin^2(x)+2\sqrt{3}\sin(x)\cos(x)=3$	Car $\sin(2x)=2\sin x\cos x$
$2\sin^2(x)+2\sqrt{3}\sin(x)\sqrt{1-\sin^2(x)}=3$	Car $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$
$2\sin^2(x)-3=-2\sqrt{3}\sin(x)\sqrt{1-\sin^2(x)}$	On a isolé le radical
$4\sin^4(x)-12\sin^2(x)+9=12\sin^2(x)(1-\sin^2(x))$	On a élevé le tout au carré pour éliminer les racines
$4\sin^4(x)-12\sin^2(x)+9=12\sin^2(x)-12\sin^4(x)$	On a développé la ligne précédente
$16\sin^4(x)-24\sin^2(x)+9=0$	On pose ici $y=\sin^2(x)$
$16y^2-24y+9=0$	
$y_{1,2}=\frac{24\pm\sqrt{24^2-36\cdot16}}{32}=\frac{24\pm0}{32}=\frac{3}{4}$	On a trouvé la racine (double)
$\sin^2(x)=\frac{3}{4}$	On se souvient que $y=\sin^2(x)$
$\sin(x)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	On a pris la racine carrée du tout (ne pas oublier le ± !)

Pour le signe « + », on a : $x_1=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ et $x_2=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$

Pour le signe « – » , on a : $x_3=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ et $x_4=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

Après vérification, on constate que seules les solutions x_1 et x_4 satisfont l'équation de départ (les solutions non valides sont apparues quand on a élevé le tout au carré).

On peut combiner ces deux solutions et le résultat final est : $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$

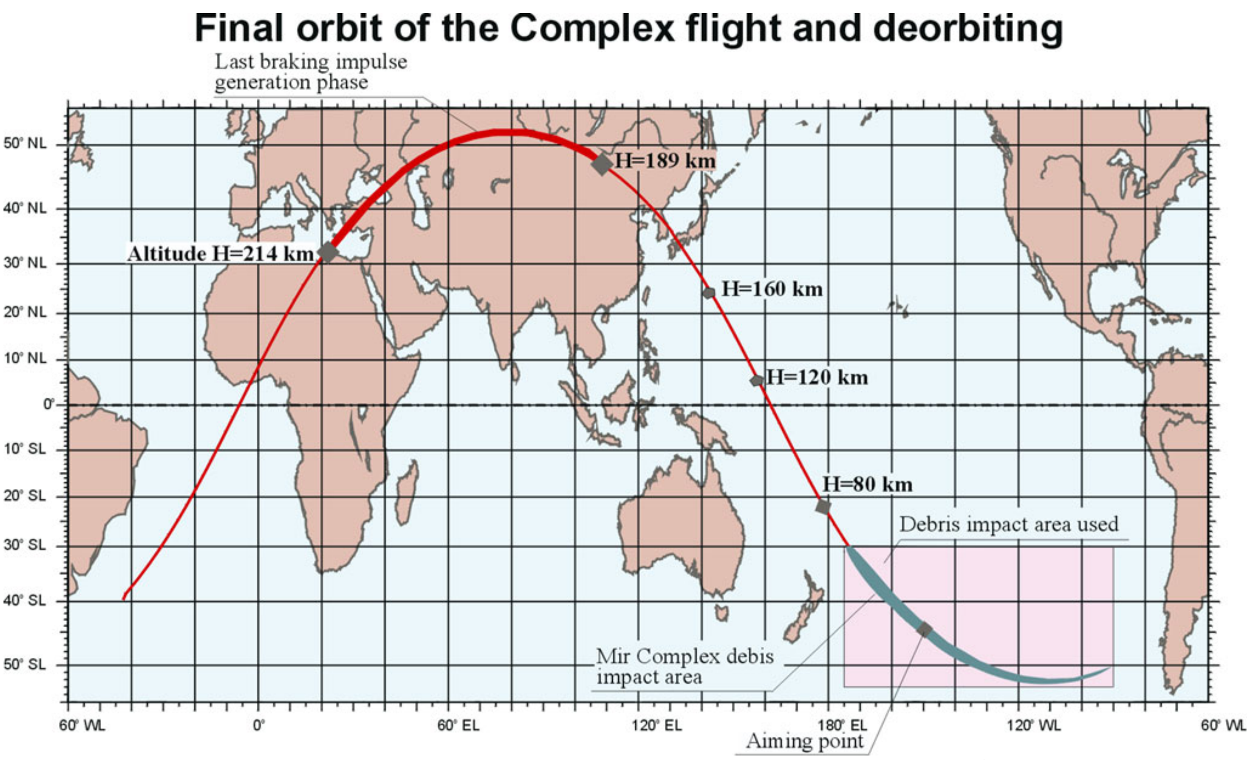
Exercice 6.14

Résolvez les équations suivantes (**a** et **b** en degrés, **c** et **d** en radians) :

a. $\sin^2(x)-2\sin(x)\cos(x)-3\cos^2(x)=0$
b. $5\sin^2(3t)+3\sin(3t)\cos(3t)-4=0$
c. $2\sin(t)+3\cot(t)=0$
d. $\cos(2x)+2\sin(x)\cos(x)=0$

6.4 Ce qu'il faut absolument savoir

Reconnaître les fonctions trigonométriques sin(x), cos(x), tan(x) et cot(x) d'après leur graphe	❑ ok
Dessiner les fonctions trigonométriques sin(x), cos(x), tan(x) et cot(x)	❑ ok
Dessiner une équation sinusoïdale du type $y = a\sin(bx+c)+d$	❑ ok
Trouver les valeurs a, b, c et d d'une équation sinusoïdale du type $y = a\sin(bx+c)+d$ d'après son graphe	❑ ok
Connaître les définitions des termes *amplitude*, *période*, *déphasage*	❑ ok
Trouver toutes les solutions d'une équation trigonométrique simple	❑ ok
Connaître les principales relations trigonométriques	❑ ok



Fin de la dernière orbite de la station Mir avant son impact dans le Pacifique

EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES: EXERCICES

1. Résoudre graphiquement les équations suivantes :

a. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b. $\tan x = -\sqrt{3}$

c. $1 + \sqrt{2}\cos x = 0$

d. $2\sqrt{3}\sin x + 3 = 0$

2. A l'aide de la calculatrice, résoudre les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

a. $\sin x = \frac{1}{4}$

b. $\frac{\cot x}{5} - \frac{\cot x}{3} = \frac{1}{4}$

c. $\sqrt{12}\cos x = \cos x - 2$

3. Résoudre les équations suivantes (techniques diverses) et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique: (les exercices * doivent être faits, les autres servent d'entraînement)

a. $*\tan 3x = -1$

b. $\cot 3x = \cot x$

c. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

d. $*\sin x = \cos x$

e. $\tan x \cot 4x = 1$

f. $*3\tan^2 x = 1$

g. $*2\cos^2 x = \cos x$

h. $*2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

i. $*3\cos^2 x = 7(1 - \sin x)$

j. $\tan^2 x + \cot^2 x = 4$

k. $*\sin 2x + tg 2x = 0$

l. $*\cos 2x = \cos x + 1$

m. $*3\cos x(\sin x + \tan x) = 2(1 + \cos x)$

n. $*5\sin^2 x - 2\cos^2 x - 3\sin x \cos x = 0$

o. $*\sin x + \cos x = 1$

p. $*\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$

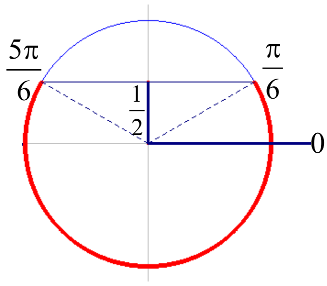
q. $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x = 1$

r. $2\sin x - 3\cos x = 3$

Inéquations trigonométriques

Pour résoudre des inéquations trigonométriques, nous allons toujours nous servir d'une illustration sur le cercle trigonométrique.

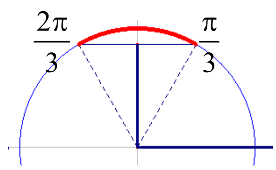
Exemples - Exercices:



1) $\sin x \le \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x \le \sin\frac{\pi}{6}$

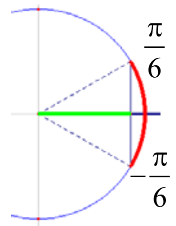
En tournant toujours dans le sens mathématique positif et en notant les solutions sur le premier tour de cercle, nous lisons sur le graphique :

$$\boxed{x \in \left[0;\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6};2\pi\right[\quad (\mathrm{mod}\, 2\pi)}$$



2) $2\sin x - \sqrt{3} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x \ge \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x \ge \sin\frac{\pi}{3}$

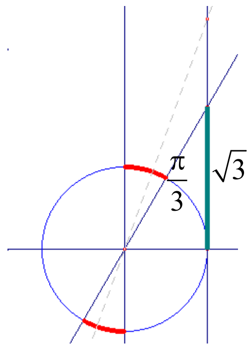
D'après le graphique : $\boxed{x \in \left[\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right] \quad (\mathrm{mod}\, 2\pi)}$



3) $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \ge \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \ge \cos\frac{\pi}{6}$

D'après le graphique :

$x \in \left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right] \quad (\mathrm{mod}\, 2\pi) \quad \Big| +\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right] \quad (\mathrm{mod}\, 2\pi)}$

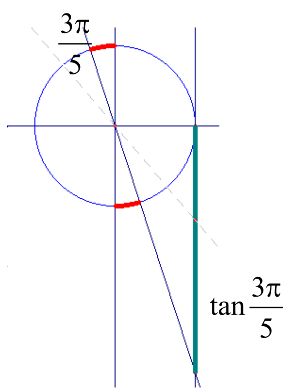


4) $\tan\left(3x+\frac{\pi}{2}\right) > \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \tan\left(3x+\frac{\pi}{2}\right) > \tan\frac{\pi}{3}$

D'après le graphique :

$3x+\frac{\pi}{2} \in \left]\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right[\quad (\mathrm{mod}\, \pi) \quad \Big| -\frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 3x \in \left]-\frac{\pi}{6};0\right[\quad (\mathrm{mod}\, \pi) \quad \Big| :3$

$\Rightarrow \quad \boxed{x \in \left]-\frac{\pi}{18};0\right[\quad (\mathrm{mod}\, \frac{\pi}{3})}$



5) $\tan\frac{3\pi}{5} - \tan(2x) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan(2x) \le \tan\frac{3\pi}{5}$

D'après le graphique :

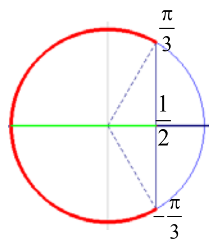
$2x \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{5}\right[\quad (\mathrm{mod}\, \pi) \quad \Big| :2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x \in \left]\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{10}\right[\quad (\mathrm{mod}\, \frac{\pi}{2})}$

Exercices plus poussés :

6) $\cos(2x)+\cos x\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2\cos^2 x-1+\cos x\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2\cos^2 x+\cos x-1\leq 0$

En résolvant cette inéquation du second degré en $\cos x$:

$\cos x$	$\|\|$		-1		$\frac{1}{2}$	
$2\cos^2 x+\cos x-1$	$+$		0	$-$	0	$+$



D'où : $2\cos^2 x+\cos x-1\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad -1\leq\cos x\leq\frac{1}{2}$

D'après le graphique : $\boxed{x\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right]\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)}$

L'exercice suivant est un exercice *haut de gamme* :

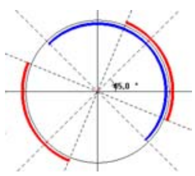
7) $\sin(3x)+\cos x>0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin(3x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)>0$

$$\Leftrightarrow\ 2\cdot\sin\left(\frac{3x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{3x-\frac{\pi}{2}+x}{2}\right)>0 \quad\Leftrightarrow\quad 2\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)>0$$

Cas favorables : $++$ et $--$:

α	I	II	III	IV
$\cos\alpha$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\sin\alpha$	$+$	$+$	$-$	$-$

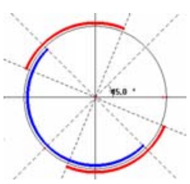
$$\Rightarrow\begin{cases}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)>0\Leftrightarrow & 2x-\frac{\pi}{4}\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\ (\mathrm{mod}\ 2\pi) & \Leftrightarrow & x\in\left]-\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right[\ (\mathrm{mod}\ \pi)\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0\ \Leftrightarrow & x+\frac{\pi}{4}\in\left]0;\pi\right[\ (\mathrm{mod}\ 2\pi) & \Leftrightarrow & x\in\left]-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)\end{cases}$$



L'intersection de ces intervalles nous fournit une première partie solution à cette inéquation :

$$\textit{Solution } S_1=\left]-\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right[\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)<0\Leftrightarrow & 2x-\frac{\pi}{4}\in\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[\ (\mathrm{mod}\ 2\pi) & \Leftrightarrow & x\in\left]\frac{3\pi}{8};\frac{7\pi}{8}\right[\ (\mathrm{mod}\ \pi)\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<0\ \Leftrightarrow & x+\frac{\pi}{4}\in\left]\pi;2\pi\right[\ (\mathrm{mod}\ 2\pi) & \Leftrightarrow & x\in\left]\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right[\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)\end{cases}$$



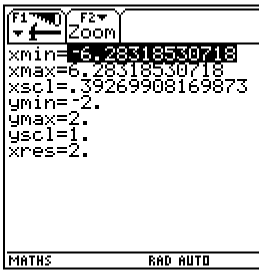
L'intersection de ces intervalles nous fournit une deuxième partie solution à cette inéquation :

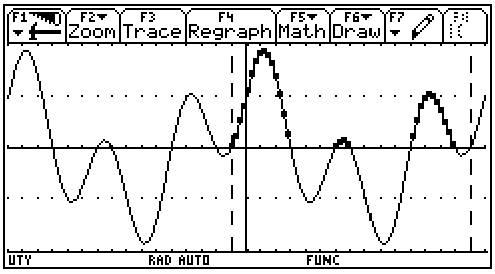
$$\textit{Solution } S_2=\left]\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{11\pi}{8};\frac{7\pi}{4}\right[\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

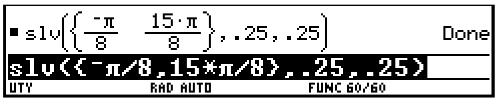
Solution finale : $\boxed{S = S_1 \cup S_2 = \left]-\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{8};\frac{7\pi}{4}\right[\pmod{2\pi}}$

Contrôle graphique : On trace le graphe de la fonction $f(x) = \sin(3x) + \cos x$ et on étudie sur quels intervalles ce graphe se situe au-dessus de l'axe des x.

$x \in [-2\pi; 2\pi] \qquad xscal = \frac{\pi}{8}$







Autre méthode de résolution :

$\sin(3x) + \cos x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\sin x - 4\sin^3 x + \cos x > 0 \quad \Big| : \cos^3 x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Comme il s'agit toutefois d'une inéquation, il faut étudier la solution en fonction du signe de $\cos^3 x$:

i) Cas où $\cos x > 0$, l'inégalité garde son sens :

$3\sin x - 4\sin^3 x + \cos x > 0 \quad \Big| : \cos^3 x > 0 \Leftrightarrow x \in E_1 = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\pmod{2\pi}$

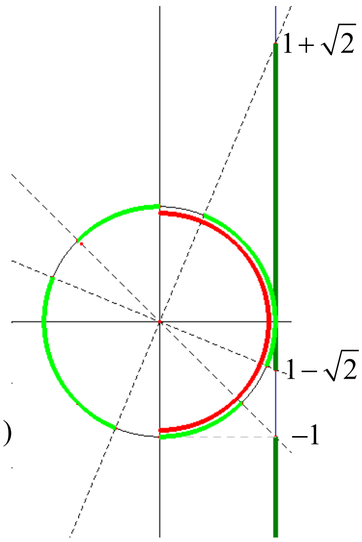
$\Leftrightarrow \quad 3 \cdot \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 4\tan^3 x + \frac{1}{\cos^2 x} > 0 \qquad Or : \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$\Leftrightarrow \quad 3\tan x \cdot (1 + \tan^2 x) - 4\tan^3 x + 1 + \tan^2 x > 0$

$\Leftrightarrow \quad -\tan^3 x + \tan^2 x + 3\tan x + 1 > 0$

$\Leftrightarrow \quad -(\tan x + 1) \cdot (\tan^2 x - 2\tan x - 1) > 0 \qquad (par\ \ factorisation)$

$\tan x$		-1		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$	
$-(\tan x + 1)$	+	0	−	−	−	−	−
$\tan^2 x - 2\tan x - 1$	+	+	+	0	−	0	+
$-(\tan x+1)\cdot(\tan^2 x - 2\tan x - 1)$	+	0	−	0	+	0	−



$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \quad , \quad \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \sqrt{2} \quad , \quad \tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1 + \sqrt{2}$

D'où une première partie de solution : (sous la condition que $\cos x > 0$)

$$S_1 = \left]-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right[\qquad \pmod{2\pi}$$

ii) Cas où $\cos x < 0$, l'inégalité change de sens :

$$3\sin x - 4\sin^3 x + \cos x > 0 \qquad \Big| : \cos^3 x < 0 \Leftrightarrow x \in E_2 = \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[\ (\mathrm{mod}\, 2\pi)$$

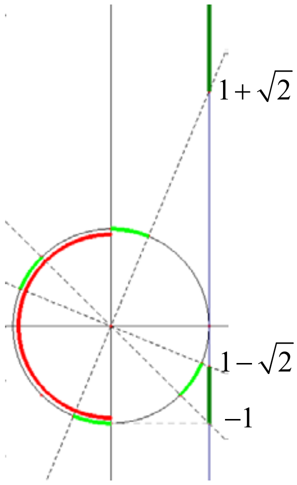
$$\Leftrightarrow \quad 3\cdot\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} - 4\tan^3 x + \frac{1}{\cos^2 x} < 0 \quad \ldots$$

$$\Leftrightarrow \quad -(\tan x + 1)\cdot(\tan^2 x - 2\tan x - 1) < 0$$

Le tableau des signes reste valable, il suffit de choisir les autres intervalles.

D'où une deuxième partie de solution : (sous la condition que $\cos x < 0$)

$$S_2 = \left]\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{8};\frac{3\pi}{2}\right[\qquad (\mathrm{mod}\, 2\pi)$$



iii) Cas où $x = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 0 = -1 < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\right) \notin S$$

iv) Cas où $x = -\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi$

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 0 = 1 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(-\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\right) \in S$$

D'où la solution finale : $\boxed{S = S_1 \cup S_2 \cup \left\{\frac{3\pi}{2}\right\} = \left]-\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{8};\frac{7\pi}{4}\right[\ (\mathrm{mod}\, 2\pi)}$

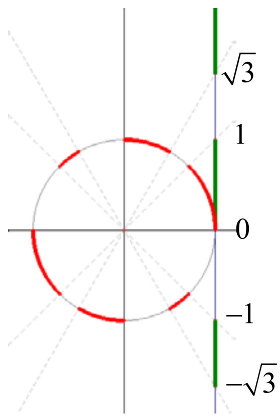
8) $\tan(2x) + \tan x > 0$ *Conditions* : $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ *et* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$x \neq \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}$ *et* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Domaine $D = \mathbb{R} - \left\{x \neq \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}\,;\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + \tan x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1-\tan^2 x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\tan x\cdot(3-\tan^2 x)}{1-\tan^2 x} > 0$$

$\tan x$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$\tan x$	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+
$3-\tan^2 x$	−	0	+	+	+	+	+	+	+	0	−
$1-\tan^2 x$	−	−	−	0	+	+	+	0	−	−	−
$\frac{\tan x\cdot(3-\tan^2 x)}{1-\tan^2 x}$	−	0	+	||	−	0	+	||	−	0	+



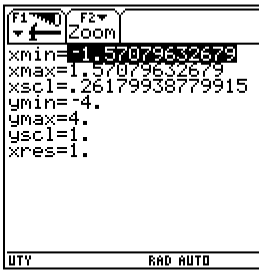
$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}\,,\quad \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1\quad,\quad \tan(0)=0\quad,\quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1\quad,\quad \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$$

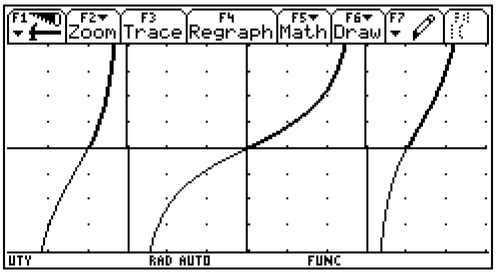
D’où la solution : $\tan x \in \left]-\sqrt{3};-1\right[\cup \left]0;1\right[\cup \left]\sqrt{3};+\infty\right[$

$$\Leftrightarrow \qquad x\in \boxed{S=\left]-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]0;\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right[\pmod{\pi}}$$

Contrôle graphique :

$x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ $\qquad xscal=\frac{\pi}{12}$





Guesmi.B

\