1. Angles orientés

1.1. Radians

Définition

Le **radian** est une unité de mesure angulaire, notée rad et définie par :

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

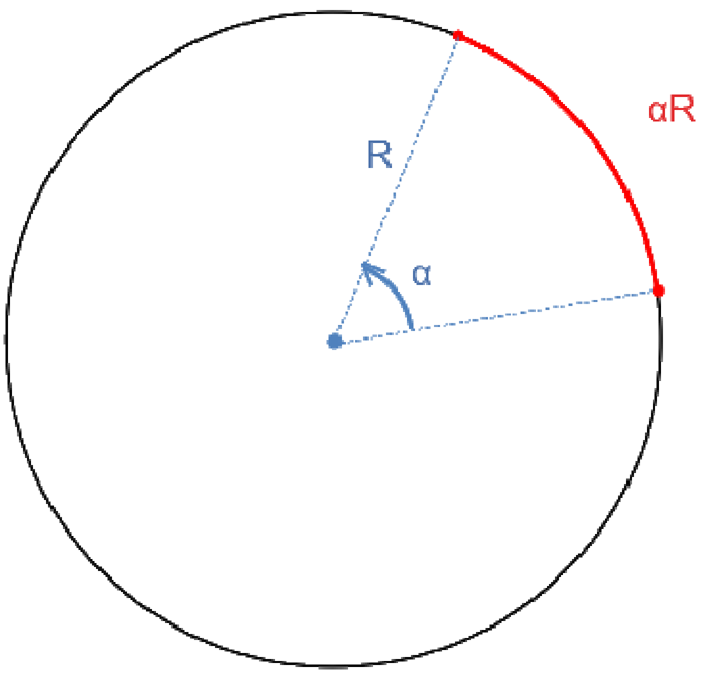
» **Remarque** : à partir de ce chapitre, tous les angles sont **exprimés par défaut en radians**.

Exemple

Mesures remarquables à connaître :

radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π
degrés	0	30	45	60	90	180	360

Propriété



La longueur de l'**arc de cercle** de rayon R et d'angle α est égale à : $\boldsymbol{\alpha R}$

1.2. Cercle trigonométrique

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$
On désigne les points $I\,(1\ ;0)$ et $J\,(0\ ;1)$.

Définition

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O, de rayon 1, et dont le sens **positif** est le **sens direct** (sens inverse des aiguilles d'une montre).

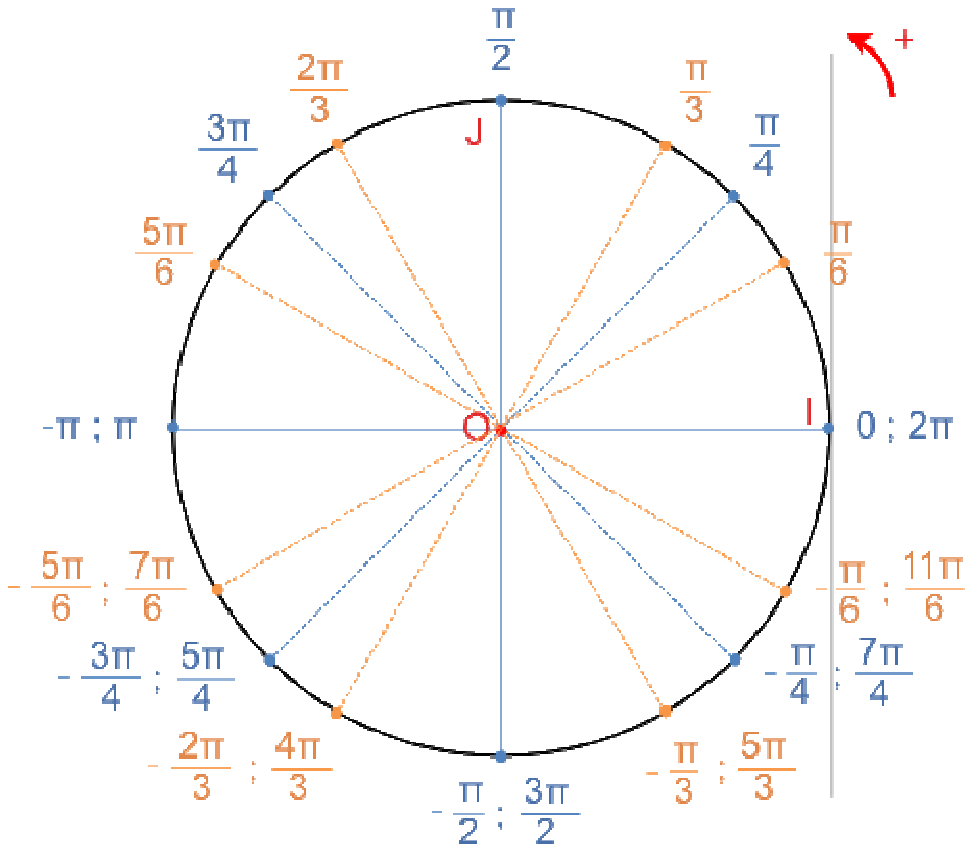
Propriétés

• Chaque point du cercle est associé à un réel de l'axe formé par la tangente au cercle en I.

• Deux réels a et b peuvent être associés au même point du cercle, si et seulement s'il existe un entier k tel que : $a-b=k2\pi$. Le réel a est alors égal au réel b **modulo** $\boldsymbol{2\pi}$ et on note : $\boldsymbol{a=b[2\pi]}$.

• Le **sens indirect** correspond au sens **négatif**.

Illustration



1.3. Angle orienté de deux vecteurs

Définitions

Soient deux vecteurs non nuls $\vec{u} et \vec{v}$
On appelle **angle orienté** $(\vec{u},\vec{v})$ l'angle formé par les vecteurs $\vec{u} et \vec{v}$ dont la mesure est affectée du signe correpondant à son sens (positive si direct, négative si indirect).

Soient deux vecteurs non nuls $\vec{u} et \vec{v}$
On appelle **mesure principale** de l'angle ($\vec{u}, \vec{v}$son **unique** mesure comprise dans l'intervalle (d'amplitude 2π) :

$]-\pi ;\pi]$

» **Remarque** : un angle orienté admet une **infinité** de mesures, toutes égales modulo 2π.

Exemple

Soit l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})=7\pi/2[2\pi]$

Le réel $7\pi 2$ étant supérieur à π, il ne s'agit pas de la mesure principale de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$Pour la déterminer, on soustrait une première fois la valeur 2π :

$(\vec{u} , \vec{v}) =7\pi/2-4\pi/2=3\pi/2$

Le réel $3\pi/2$ étant aussi supérieur à π, on soustrait une nouvelle fois la valeur 2π :

$(\vec{u}, \vec{v})=3\pi/2-4\pi/2=-\pi/2\in]-\pi ;\pi]$

La mesure principale de l'angle $(u\longrightarrow ;v\longrightarrow)$ est donc : $-\pi 2$

Théorème

(relation de chasles)

Soient trois vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$
D'après la **relation de Chasles** pour les angles orientés :$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$

2. Cosinus et sinus

2.1. Caractérisation sur le cercle trigonométrique

Théorème

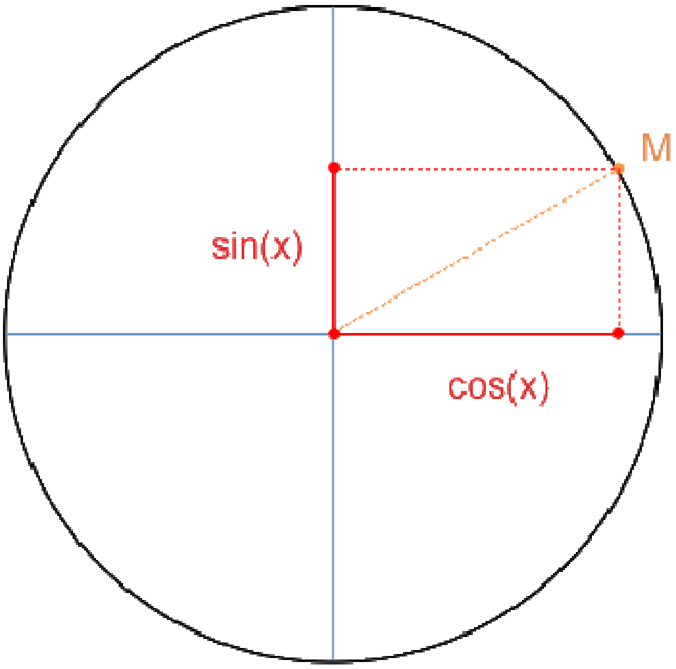
Soient un réel x et M le point du cercle trigonométrique associé à x.
Les coordonnées de M dans le repère sont :

$$\boldsymbol{M\ (\cos(x) ;\sin(x))}$$

et on a :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM}=\cos(x)\vec{\imath}+\sin(x)\vec{\jmath}}$$

Illustration



Propriétés

• Pour tout réel x : $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$

• Pour tout réel x : $-1\leq\cos(x)\leq1$

• Pour tout réel x : $-1\leq\sin(x)\leq1$

• Pour tout réel x et tout entier k : $\cos(x+2k\pi)=\cos(x)$

• Pour tout réel x et tout entier k : $\sin(x+2k\pi)=\sin(x)$

2.2. Valeurs remarquables

Propriétés

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

2.3. Formules des angles associés

Propriétés

Pour tout réel x :

- $\cos(-x)=\cos(x)$
- $\cos(\pi-x)=-\cos(x)$
- $\cos(\pi+x)=-\cos(x)$
- $\sin(-x)=-\sin(x)$
- $\sin(\pi-x)=\sin(x)$
- $\sin(\pi+x)=-\sin(x)$
- $\cos(\pi 2-x)=\sin(x)$
- $\sin(\pi 2-x)=\cos(x)$

2.4. Formules d’addition et de duplication

Propriétés

Pour tous réels a et b :

- $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$
- $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$
- $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$
- $\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2cos^2(a)-1=1-2sin^2(a)$
- $\sin(2a)=2sin(a)\cos(a)$

3. Equations trigonométriques

3.1. $\cos(x)=\cos(b)$

Théorème

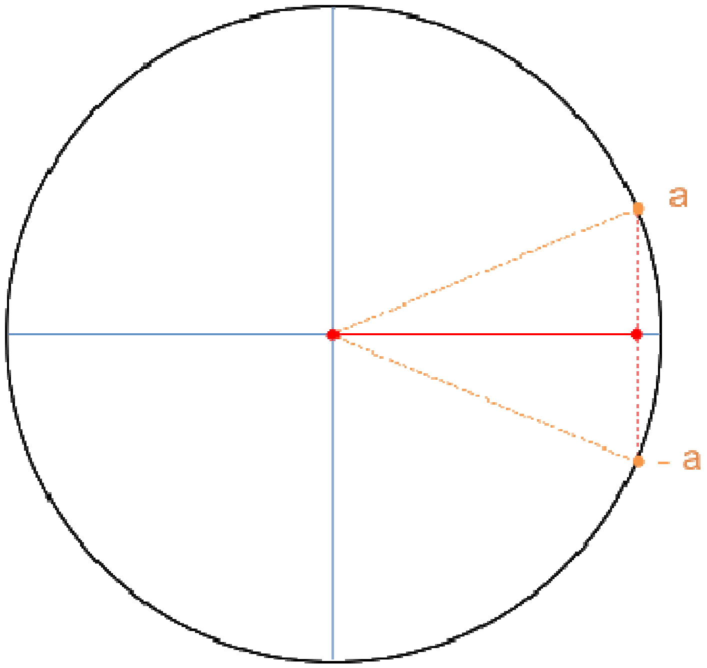
Soit un réel a.
L’équation $\mathbf{\cos(x)=\cos(a)}$, d’inconnue x, a pour solutions réelles :

$$\boldsymbol{x=a[2\pi]} \text{ ou } \boldsymbol{x=-a[2\pi]}$$

c’est-à-dire :

$$\boldsymbol{x=a+2k\pi\ (\forall k\in\mathbb{Z})} \text{ ou } \boldsymbol{x=-a+2k\pi\ (\forall k\in\mathbb{Z})}$$

Illustration



3.2. $\sin(x)=\sin(b)$

Théorème

Soit un réel a.

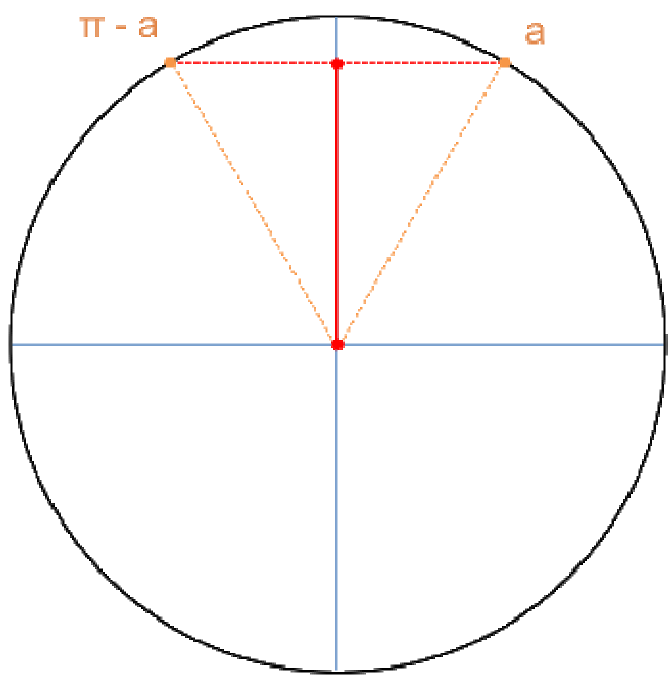
L'équation $\sin(x)=\sin(a)$, d'inconnue x, a pour solutions réelles :

$$x=a+2k\pi \text{ ou } x=\pi-a+2k\pi$$

c'est-à-dire :

$$x=a+2k\pi\ (\forall k\in\mathbb{Z}) \text{ ou } x=\pi-a+2k\pi\ (\forall k\in\mathbb{Z})$$

Illustration


π - a
a