Chapitre 14. Relation métrique et trigonométrie

Compétences : *Connaître et savoir utiliser les formules d'addition et de duplication du* cos *et* sin
Connaître et savoir utiliser les relations métriques

I. Formules d'addition et de duplication

Théorème 1: *Formules d'addition*

Quels que soient les nombres réels a et b, on a :
cos (a – b) = cos a. cos b + sin a. sin b
cos (a + b) = cos a. cos b – sin a. sin b
sin (a – b) = sin a. cos b – cos a. sin b
sin (a + b) = sin a. cos b + cos a. sin b

Démonstration : Soit M et N deux points dun cercle trigonométrique et a et b deux réels tels que $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM}\right)=b[2\pi]$ et $\left(\vec{i};\overrightarrow{ON}\right)=a[2\pi]$.

D'après la relation de Chasles, $\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right)=a-b[2\pi]$.

De plus, M et N appartiennent au cercle trigonométrique donc $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|=1$ et $\left\|\overrightarrow{ON}\right\|=1$ donc $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{ON}\right\|\cos\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right)=\cos(a-b)$.

Or le repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ est orthonormé donc $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\cos a\cos b$ + sin$a$ sin$b$.

Donc $\cos(a-b)$ = cos$a$ cos$b$ + sin$a$ sin$b$ ♦

Aussi, $\cos(a-(-b))$ = cos$a$ cos(– b) + sin$a$ sin(– b) = cos$a$ cos$b$ – sin$a$ sin$b$

Donc $\cos(a+b)$ = cos$a$ cos$b$ – sin$a$ sin$b$ ♦

Mais aussi, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a-b)\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos(a-b)+\sin\frac{\pi}{2}\sin(a-b)=\sin(a-b)$

$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+b\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

Donc $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$ ♦

$\sin(a-(-b))=\sin a\cos(-b)-\cos a\sin(-b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$ ♦

Théorème 2: *Formules de duplication*

Pour tout réel a,
sin 2a = 2sin a cos a.
cos 2a = cos² a – sin² a = 2cos² a – 1 = 1 – 2 sin² a

Démonstration : En utilisant le théorème précédent et en remplaçant b par a, on obtient la preuve.
On utilisera aussi l'égalité cos²a + sin²a = 1 , $a \in \mathbb{R}$, pour démontrer l'égalité cos 2a = 2cos²a – 1 = 1 – 2 sin²a

II. Relations métriques dans le triangle

Théorème 3: *Théorème de la médiane*

Pour tous points A,B et C du plan, si I est le milieu de [AB], on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

Démonstration : Soit M un point du plan et I le milieu de [AB] alors,

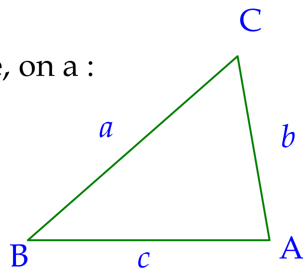
$$MA^2+MB^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2 = MI^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+IA^2+MI^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+IB^2$$

$$= 2MI^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+2IB^2 = 2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$$

Théorème 4 : *Théorème d'AL-Kashi*

Soit ABC un triangle, avec les notations de la figure ci-contre, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$



Démonstration : Soit a = CB, b = AC et c = AB.

$$a^2 = BC^2=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2 = AB^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+AC^2 = AB^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+AC^2$$

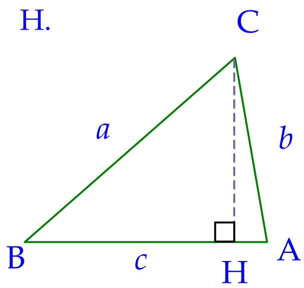
$$a^2 = c^2-2bc\cos\hat{A}+b^2 = b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$ ♦ De même pour b^2 et c^2.

Théorème 5 : *Formules des sinus dans un triangle*

Avec les notations précédentes, l'aire du triangle ABC est S = $\frac{1}{2}bc\sin\hat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\hat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$.

Pour tout triangle ABC non aplati, on a : $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}} = \dfrac{abc}{2S}$.

Démonstration : Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). Le triangle ACH est donc rectangle en H.



Soit a = CB, b = AC et c = AB.

Alors $\sin\hat{A} = \dfrac{CH}{CA}$ donc $CH = b\sin\hat{A}$.

L'aire du triangle ABC est appelée S. S = $\dfrac{BA\times CH}{2} = \dfrac{1}{2}cb\sin\hat{A}$ ♦

Le triangle ABC n'est pas aplati donc $\hat{A}\neq 0$ donc $\sin\hat{A}\neq 0$.

$$S = \frac{1}{2}cb\sin\hat{A} \Leftrightarrow 2S = cb\sin\hat{A} \Leftrightarrow 2aS = acb\sin\hat{A} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{acb}{2S}$$ ♦

On procède de la même façon pour démontrer que

S = $\frac{1}{2}ac\sin\hat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$ et $\frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = \frac{abc}{2S}$. Il vient alors que

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = \frac{abc}{2S}$$