COURS DE PROBABILITE

Notions de probabilités

Il existe plusieurs manières de définir une probabilité. Principalement, on parle de *probabilités inductives ou expérimentales* et de *probabilités déductives ou théoriques*. On peut les définir comme suit :

Probabilité expérimentale ou inductive : la probabilité est déduite de toute la population concernée. Par exemple, si sur une population d'un million de naissances, on constate 530000 garçons et 470000 filles, on dit que P[garçon] = 0.53

Probabilité théorique ou déductive : cette probabilité est connue grâce à l'étude du phénomène sous-jacent sans expérimentation. Il s'agit donc d'une connaissance *a priori* par opposition à la définition précédente qui faisait plutôt référence à une notion de probabilité *a posteriori*. Par exemple, dans le cas classique du dé parfait, on peut dire, sans avoir à jeter un dé, que P["obtenir un 4"] = $\frac{1}{6}$.

Comme il n'est pas toujours possible de déterminer des probabilités *a priori*, on est souvent amené à réaliser des expériences. Il faut donc pouvoir passer de la première à la deuxième solution. Ce passage est supposé possible en terme de limite (*i.e.* avec une population dont la taille tend vers la taille de la population réelle)

Epreuves et Evènements

Une **expérience** est dite **aléatoire** si ses résultats ne sont pas prévisibles avec certitude en fonction des conditions initiales.

On appelle **épreuve** la réalisation d'une expérience aléatoire.

On appelle **évènement** la propriété du système qui une fois l'épreuve effectuée est ou n'est pas réalisée.

<u>Exemple</u> : Soient l'expérience aléatoire "lancer deux dés discernables" (et non pipés si l'on veut vraiment une expérience aléatoire) et l'évènement A "obtenir un total des nombres >10".

A se réalise pour les épreuves (6,5), (5,6), (6,6).

Correspondance entre les opérateurs logiques et les ensembles (la relation liant ces notations est un isomorphisme, on peut donc employer n'importe laquelle).

Logique	Ensemble
état du système	élément $w \in \Omega$
évènement A	partie $\{A\} \subset \Omega$
évènement certain	espace entier Ω
évènement impossible	partie vide $\emptyset$
évènement contraire $\overline{A}$ ou A^c	partie complémentaire $\bar{A}$
l'évènement B entraine l'évènement A	$\{B\} \subset \{A\}$
A et B	intersection $\{A\} \cap \{B\}$
évènements incompatibles $A \Rightarrow \overline{B} et B \Rightarrow \overline{A}$	parties disjointes $\{A\} \cap \{B\} = \emptyset$
A ou B (ou non exclusif)	réunion $\{A\} \cup \{B\}$
ou exclusif	somme $\{A\} + \{B\} = (\{A\} \cup \{B\}) - (\{A\} \cap \{B\})$

A partir de ces notions, on peut préciser le calcul de probabilités d'un évènement A :

probabilité théorique : $P(A) = \frac{nombre\ de\ cas\ favorable}{nombre\ total\ de\ cas}$. **(ce qui nous interrese)**

probabilité expérimentale : $P(A) = \frac{nombre\ d'épreuves\ qui\ réalisent\ A}{nombre\ total\ d'épreuves}$. Cette approche (aussi appellée approche *fréquentiste*) ne permet pas de donner une valeur ni même un sens à la probabilité d'un évènement non répétable du genre "neigera-t-il le 25 octobre 2990" ce qui limite de fait le champ d'application du calcul des probabilités.

Pour les fréquentistes, seules ont un sens les probabilités calculées *a posteriori* sur la base de la répétition d'un grand nombre d'évènements identiques; pour les subjectivistes, au contraire, la notion de probabilité *a priori*, évaluable en fonction d'un sentiment individuel d'incertitude, peut avoir un sens

Axiomatique de Kolmogorov

A chaque évènement, on associe un nombre positif compris entre 0 et 1, sa probabilité. Afin d'éviter toute discussion sur cette notion, la théorie moderne des probabilités repose sur l'axiomatique suivante :

Définition 1

On appelle probabilité sur ($\Omega, \Im$) (où Ω est l'ensemble des évènements et $\Im$ une classe de parties de Ω), ou loi de probabilité, une application P de $\Im$ dans $[0, 1]$ telle que :

- $P(\Omega) = 1$

- *pour tout ensemble dénombrable d'évènements incompatibles* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *on a* $P(\bigcup A_i) = \sum P(A_i)$.

Définition 2

On appelle espace probabilisé le triplé ($\Omega, \Im, P$*)*

Une loi de probabilité n'est donc rien d'autre qu'une mesure positive de masse totale 1. On peut donc relier la théorie des probabilités à celle de la mesure

Propriété 1 : $P(\emptyset) = 0$

Propriété 2 : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Propriété 3 : $P(A) \leq P(B)$ *si* $A \subset B$

Propriété 4 : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Propriété 5 : $P(\bigcup A_i) \leq \sum_i P(A_i)$ (Il n'y a stricte égalité que si les évènements A_i sont deux à deux incompatibles.)

Propriété 6 : Continuité monotone séquentielle. $Soient\ A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \emptyset.$

$$Si\ \lim_{n \to \infty} A_n = \emptyset\ alors\ \lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0$$

Propriété 7 : Théorème des probabilités totales : Soit $\Omega = \bigcup B_i$ *un système complet d'évènements (i.e. tel que* $\{B_i\}$ *constitue une partition de* Ω*).*

$\forall A\ :\ P(A) = \sum_i P(A \cap B_i)$

Remarque : $P(A) = 0 \not\Rightarrow A = \emptyset$. De même, $P(A) = 1 \not\Rightarrow A = \Omega$.