Exercice n°1 :

On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 3U_n + 2n + 1 \; pour \; tout \; n \in IN \end{cases}$

1) $a/$ Calculer U_1 et U_2 .

   $b/$ Vérifier qua la suite U n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2) On pose, pour tout $n \in IN,\ V_n = U_n + n + 1$.

   $a/$ Calculer V_0 et V_1 .

   $b/$ Montrer que V est une suite géométrique de raison 3.

   $c/$ Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

3) On pose, pour tout $n \geq 2,\ \ S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.

   et $S'_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$.

   Exprimer S_n et S'_n en fonction de n.

Exercice n°3 :

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principale A, et H le milieu de $[BC]$, soit K le pied de la hauteur issue de B. *(voir figure)*

1) Montrer que $\widehat{BAH} = \widehat{CBK}$.
2) On pose : $AB = 4$ et $\widehat{BAH} = \alpha$, soit donc $\widehat{BAC} = 2\alpha$.

   $a/$ Montrer que : $BC = 8\sin\alpha$, puis $BK = 8\sin\alpha\cos\alpha$.

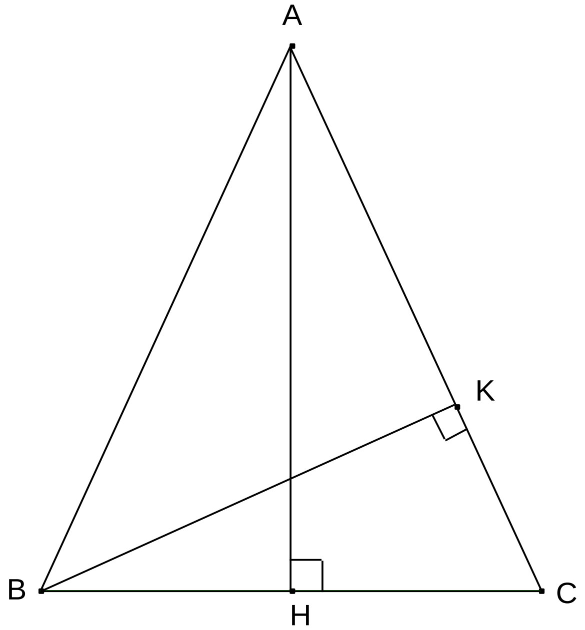
   $b/$ Exprimer BK en fonction de $\sin(2\alpha)$.

   $c/$ En déduire que : $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$.
3) $a/$ Exprimer AK en fonction de $\cos(2\alpha)$.

   $b/$ Montrer que : $CK = 8\, sin^2\alpha$.

   $c/$ En remarquant que $AK + CK = AC = 4$, montrer que : $\cos(2\alpha) = 1 - 2\, sin^2\alpha$.

   puis montrer que : $\cos(2\alpha) = 2\, cos^2\alpha - 1$.



Bonne chance

CORRECTION(proposée par Guesmi.B)

EXERCICE1

1)$u_0=2$; pour n=0 alors $u_1=3u_0+1=7$

Pour n=1 on a : $u_2=3u_1+2+1=24$

b) on a :$u_1-u_0=7-2=5$

$u_2-u_1=24-7=17$

donc $u_2-u_1\neq u_1-u_0$

donc (u_n) n'est pas arithmétique

de meme $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$ donc la suite n'est pas géométrique

2)a) $v_0=u_0+1=3$

$V_1=u_1+1+1=9$

b)$v_{n+1}=u_{n+1}+n+1+1$

$=3u_n+3n+3$

$=3(u_n+n+1)$

$=3v_n$

Donc (v_n) est une suite géometrique de raison q=3

c) $v_0=3$

donc $v_n=v_0q^n$

$=3.3^n=3^{n+1}$

3)n≥2 $S_n=v_0(\frac{3^{n+1}-1}{3-1}) = \frac{3}{2}(3^{n+1}-1)$

On a : $v_n=u_n+n+1$ donc $u_n=v_n-n-1$ (1)

Donc d'apres (1)

$U_0=v_0-0-1$

$U_1=v_1-1-1$

$U_2=v_2-2-1$

…………

……………

$U_n=v_n-n-1$

(en faisant la somme)

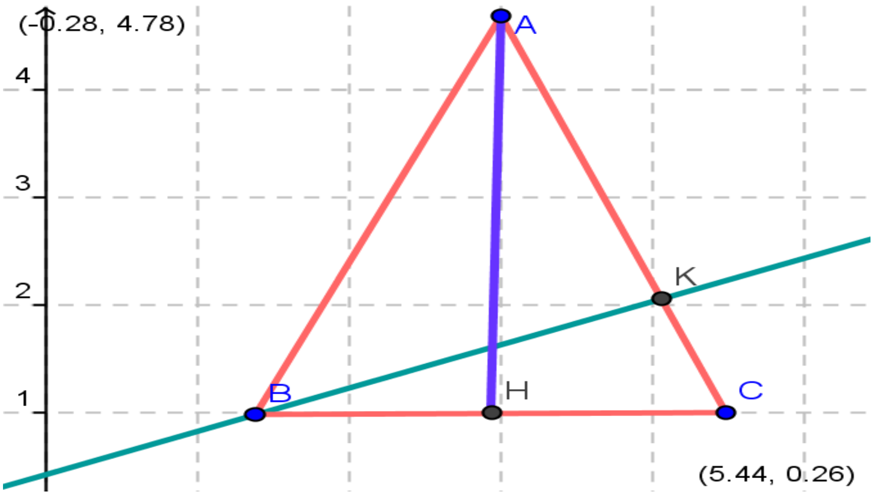
$S'_n=S_n-(1+2+3+\ldots\ldots.+n)\ -\ (1+1+1+1\ldots\ldots.+1)$ (n+1) fois 1

$=S_n+\frac{n(n+1)}{2}-(n+1)X1$

$=\frac{3}{2}(3^{n+1}-1)-\frac{(n+1)(n-2)}{2}$

EXERCICE2

1)



On a : $\widehat{CBK}+\hat{C}=90°$; $\widehat{BAH}+\hat{B}=90°\ mais\ \hat{B}=\hat{C}$

Donc $\widehat{CBK}=\widehat{BAH}$

2)a) $\sin\alpha=\frac{\frac{BC}{2}}{4}=\frac{BC}{8}\ donc\ BC=8sin\alpha$

De meme $\cos\alpha=\frac{BK}{BC}\ donc$ BK=BC cosα=8sinαcosα

b) dans le triangle ABK

$BK=4\sin2\alpha$

Or $BK=8\sin\alpha \cos\alpha$ donc $\sin2\alpha=2\sin\alpha \cos \alpha$

3)a) on a $AK=4\cos2\alpha$

b) dans le triangle BKC

$CK=BC\sin\alpha$ mais $BC=8\sin\alpha$

Donc $CK=8\sin^2\alpha$

c)$AK+CK=4$

donc $4\cos2\alpha+8\sin^2\alpha=4$ alors $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

mais $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ donc $\cos2\alpha=1-2(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$