CONTINUITÉ d'une fonction

Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$ et sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Les intervalles considérés sont non vides et non réduits à un point.

1. Fonction continue en un point

1.1. Définition *Continuité en un point*

Soient I un intervalle, f une fonction définie (au moins) sur I et $a \in I$.

On dit que f est continue en a lorsque f admet une limite en a égale à $f(a)$.

En formulant différemment cette définition, on obtient plusieurs variantes toutes équivalentes :

En effet, dire que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ signifie :

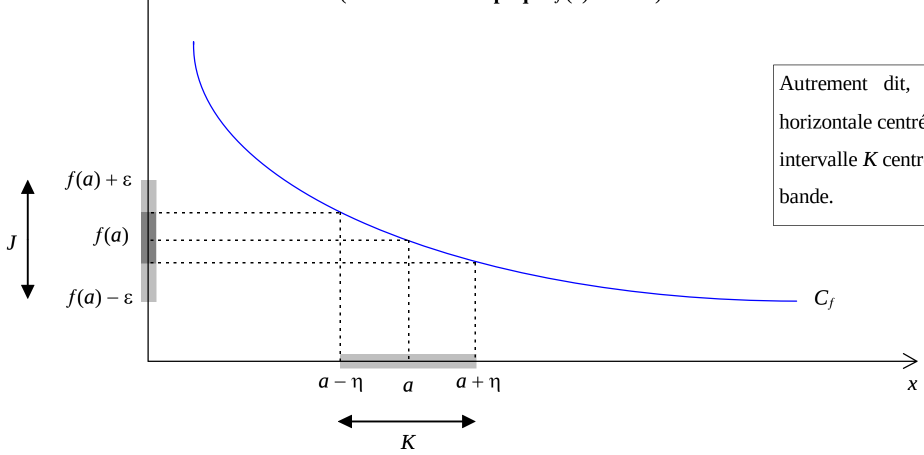
- quel que soit l'intervalle ouvert[1] J centré en $f(a)$, les nombres $f(x)$ sont tous dans J pour x proche de a.

  (Cette formulation étant encore trop vague, on lui préfèrera l'une des suivantes)

- quel que soit l'intervalle ouvert J centré en $f(a)$, il existe un intervalle K centré en a tel que pour tout x de I :

$$x \in K \Rightarrow f(x) \in J$$

(Lire "x dans K **implique** $f(x)$ dans J")



Autrement dit, quelle que soit la "bande horizontale centrée en $f(a)$", on peut trouver un intervalle K centré en a dont l'image est dans la bande.

- quel que soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ (la largeur de J), il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ (la largeur de K) tel que pour tout $x \in I$:

$$|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

  Ce qui s'écrit avec les quantificateurs $\forall$ (quel que soit) et $\exists$ (il existe) :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

  (Cette dernière formulation avec quantificateurs est hors-programme)

  Et par négation, une fonction f est non continue en a lorsque :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in I, |x - a| < \eta \ \textbf{et} \ |f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon$$

(La négation de "$\forall x, P(x)$" est "$\exists x$, non $P(x)$", celle de "$\exists x, P(x)$" est "$\forall x$, non $P(x)$" et celle de "$A \Rightarrow B$" est "A et non B")

Remarque : l'usage des valeurs absolues est ici bien pratique. Par exemple, $|x - a| < \eta$ signifie :

$$a - \eta < x < a + \eta$$

i.e. : $x \in \,]a - \eta\,;\, a + \eta[$

De même, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ signifie :

$$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$$

Cette dernière formulation est la plus pratique pour démontrer, avec cette définition, qu'une fonction est continue ou non en un point (ce qui n'arrivera que dans certaines démonstrations théoriques puisque dans la pratique nous disposerons de théorèmes "opératoires" bien plus commodes ; voir plus bas).

Remarque : la condition $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ peut aussi s'écrire $\lim\limits_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$.

[1] Peut-on remplacer "ouvert" par "fermé" (et donc les inégalités strictes par des inégalités larges) dans cette définition ? En général, non. En effet, l'intervalle $[f(a)\,;\,f(a)]$ est fermé et contient $f(a)$ et avec un tel choix, la définition peut tomber en défaut mais comme on a dit, en préambule, que les intervalles n'étaient pas réduits à un point, cela peut se faire ici sans conséquence.

Un contre-exemple à connaître : *Cas d'une fonction n'ayant pas de limite en un certain réel a*

Notons E la fonction "partie entière" :

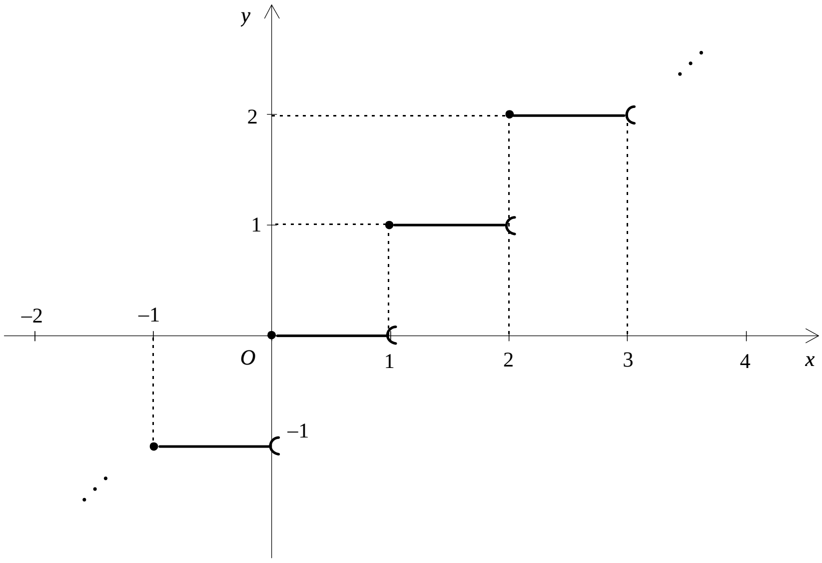
$$E(x) = \text{le plus grand entier inférieur ou égal à } x$$

Autrement dit, $E(x)$ est l'unique entier vérifiant : $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$

Par exemple $E(\pi) = 3$; $E(-\pi) = -4$. On remarquera que la fonction "partie entière" des mathématiciens n'est pas impaire (ainsi la largeur des "marches" est toujours la même) contrairement à la fonction "partie entière" des informaticiens qui considèrent eux, par symétrie, que la partie entière de $-\pi$ devrait être -3 au lieu de -4.

Dessinons la représentation graphique de cette fonction :

La fonction "partie entière" est une fonction "en escalier".



Cette fonction admet des discontinuités en tout entier.

Nous avons par exemple : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} E(x) = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} E(x) = 1$

En conséquence, la fonction partie entière n'a pas de limite en 2 (puisque les limites à gauche et à droite sont différentes). Donc cette fonction **n'est pas continue** en 2[(1)] .

On montre, de même, que E est non continue aux autres points d'abscisses entières.

Autre exemple de fonction non continue :

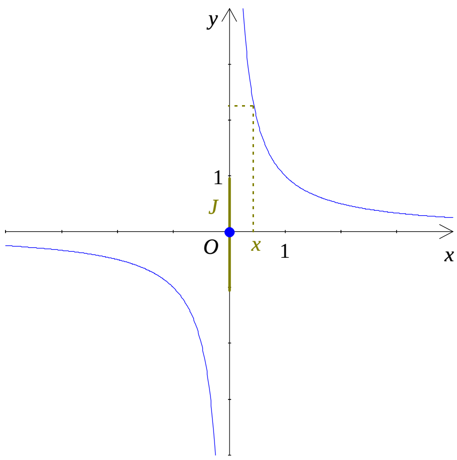
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

n'est pas continue en 0.

En effet, prenons l'intervalle $J =]-1 ; 1[$. Il est bien centré en $f(0) = 0$.

Alors pour tout intervalle K de la forme $]-\eta ; \eta[$, on peut trouver un réel x dans K tel que $f(x) \notin J$. Il suffit de choisir :

$$x = \min\left(\frac{\eta}{2} ; 1\right)$$



Ainsi, on a toujours $0 < x \leqslant 1$ et par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geqslant 1$ donc $f(x) \notin J$.

Ce qui prouve que f n'est pas continue en 0.

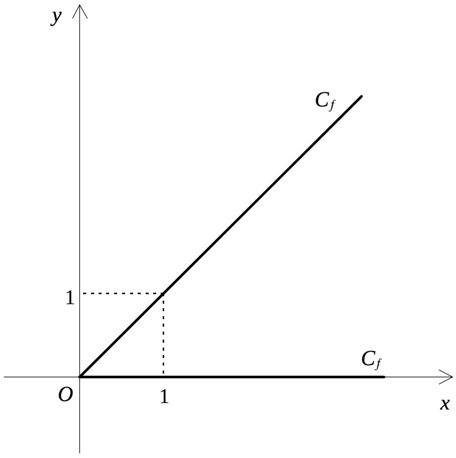
---

(1) De manière plus rigoureuse, on peut justifier ce résultat en disant qu'il existe un intervalle ouvert J centré en $E(2) = 2$ (à savoir, par exemple $J =]1,5 ; 2,5[$) qui est tel que pour tout intervalle K centré en 2 (donc de la forme $]2 - \eta ; 2 + \eta[$), il existe un réel x de K tel que $E(x) \notin J$ (prendre par exemple $x = 2 - \frac{\eta}{2}$, qui si η est inférieur à 2, vérifiera $E(x) = 1$, qui n'appartient effectivement pas à J)

Propriété graphique des fonctions continues : on dit souvent qu'une fonction continue est représentée par un trait continu (obtenu sans lâcher le crayon). Il faut rester méfiant avec cette interprétation car en Mathématiques, il existe des fonctions "monstres" comme par exemple :

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Le représentation graphique de cette fonction est donnée ci-contre :



En apparence, on pourrait croire que cette représentation graphique se trace sans lever le crayon (car $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$) et pourtant la fonction f présente une infinité de discontinuités...

2. Fonction continue sur un intervalle

2.1. Définition *Continuité sur un intervalle*

Soient I un intervalle et f une fonction définie (au moins) sur I.

On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout point a de I.

Exemple

La fonction "racine carrée" $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration (Hors programme)

Continuité en 0

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\eta = \varepsilon^2$. Ainsi, par croissance de $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$|x| < \eta \overset{x\in\mathbb{R}_+}{\Rightarrow} 0 \leqslant x < \varepsilon^2 \Rightarrow 0 \leqslant \sqrt{x} < \varepsilon$$

Ce qui prouve la continuité de la fonction "racine carrée" en 0.

Continuité en $a \in]0, +\infty[$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\eta = \varepsilon\sqrt{a}$ et utilisons l'identité $\left(\sqrt{x} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right) = x - a$, ainsi :

$$|x - a| < \eta \Rightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| < \frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \Rightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| < \varepsilon$$

Ce qui prouve la continuité de la fonction "racine carrée" en a.

On donc prouvé la continuité de la fonction "racine carrée" sur $\mathbb{R}_+$.

Commentaire :
Cet exemple montre comment l'application directe de la définition 1.1. est délicate. Heureusement, dans de nombreux cas on pourra s'en passer. On verra notamment plus loin que toute fonction dérivable est continue, ce qui sera bien pratique. Cependant, on verra également que la fonction "racine carrée" n'est pas dérivable en 0 ce qui justifiera l'étude faite "à la main" ci-contre.

2.2. Théorèmes généraux *Règles opératoires sur les fonctions continues*

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $f + g$ est continue sur I.
- λf est continue sur I.
- fg est continue sur I.
- si, de plus, g est non nulle sur I, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.

Ce théorème permettra d'obtenir un premier "stock" de fonctions continues.

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction continue sur un intervalle J contenant $f(I)$.

Alors : $g \circ f$ est continue sur I

Démonstration (Hors programme)

Continuité de la somme de deux fonctions continues :

Soit $a \in I$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme f est continue en a, il existe $\eta_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in I$:

$$|x - a| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme g est continue en a, il existe $\eta_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in I$:

$$|x - a| < \eta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Notons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Ainsi, pour tout $x \in I$:

$$|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))| \leqslant |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$$

Ce qui prouve la continuité de $f + g$ en a.

Comme ce raisonnement est valable pour tout a de I, $f + g$ est continue sur I.

Continuité de λf où f continue :

Soit $a \in I$. Comme f est continue en a, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$, tel que pour tout $x \in I$:

$$|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}$$

On a alors : $$|x - a| < \eta \Rightarrow |\lambda f(x) - \lambda f(a)| \leqslant \frac{|\lambda|\varepsilon}{|\lambda| + 1} < \varepsilon$$

D'où la continuité de λf en a.

Comme ceci est valable pour tout a de I, λf est continue sur I.

Continuité du produit de deux fonctions continues :

On aura ici besoin du lemme suivant :

Lemme : si g est continue en a, alors il existe un voisinage K de a sur lequel g est bornée

Démonstration du lemme :

Choisissons $\varepsilon = 1$. Comme g est continue en a, il existe $\eta_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$|x - a| < \eta_0 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < 1$$

Ainsi, pour tout $x \in K =]a - \eta_0 ; a + \eta_0[$, on a :

$$g(a) - 1 < g(x) < g(a) + 1$$

Donc g est bien bornée sur K. Pour la suite, on note $M = \max(|g(a) - 1|, |g(a) + 1|)$.

Retour à nos affaires : soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme f est continue en a, il existe $\eta_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout x de I :

$$|x - a| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Comme g est continue en a, il existe $\eta_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout x de I :

$$|x - a| < \eta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon$$

Notons $\eta = \min(\eta_0, \eta_1, \eta_2)$.

Écrivons : $$f(x)g(x) - f(a)g(a) = (f(x) - f(a))g(x) + (g(x) - g(a))f(a)$$

Ainsi : $$|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x)g(x) - f(a)g(a)| \leqslant |f(x) - f(a)|\,|g(x)| + |g(x) - g(a)|\,|f(a)| < \varepsilon(M + |f(a)|)$$

Ce qui prouve la continuité de fg en tout a de I et donc sur I.

Continuité de l'inverse :

On aura ici besoin du lemme suivant :

Lemme : si g est continue et non nulle en a, alors g est non nulle sur un voisinage de a

Démonstration du lemme :

Supposons $g(a) > 0$. (Le cas $g(a) < 0$ est analogue)

Choisissons $\varepsilon = \dfrac{g(a)}{2} \in \mathbb{R}_+^*$. Comme g est continue en a, il existe $\eta_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$|x - a| < \eta_0 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon$$

C'est-à-dire : $$|x - a| < \eta_0 \Rightarrow g(a) - \varepsilon < g(x) < g(a) + \varepsilon$$

C'est-à-dire : $$|x - a| < \eta_0 \Rightarrow \frac{g(a)}{2} < g(x) < \frac{3g(a)}{2} \qquad (\ast)$$

En particulier : $$|x - a| < \eta_0 \Rightarrow 0 < g(x)$$

Donc g est non nulle sur $]a - \eta_0 ; a + \eta_0[$.

Retour à nos affaires : soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme g est continue en a, il existe $\eta_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout x de I :

$$|x - a| < \eta_1 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon$$

Notons $\eta = \min(\eta_0, \eta_1)$. Ainsi :

$$|x - a| < \eta \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right| \leqslant \frac{|g(x) - g(a)|}{|g(x)|\,|g(a)|} \leqslant \frac{2\varepsilon}{|g(a)|^2} \quad \text{(d'après } (\ast)\text{)}$$

Ce qui prouve la continuité de g sur I.

Continuité du quotient : elle découle de celle de l'inverse combinée avec celle du produit.

Continuité de la composée :

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme g est continue en $f(a)$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $y \in J$:

$$|y - f(a)| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$$

Comme f est continue en a, il existe $\eta' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in I$:

$$|x - a| < \eta' \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \eta$$

D'où : $$|x - a| < \eta' \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \eta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$$

D'où la continuité de $g \circ f$ sur I.

2.3. Conséquence

- Toute fonction polynôme (à coefficients réels) est continue sur $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle (à coefficients réels) est continue sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition.

Démonstration :

- La fonction $x \mapsto x$ est clairement continue sur $\mathbb{R}$. (La démonstration est triviale et laissée au lecteur à titre d'exercice). Par continuité des produits de fonctions, on en déduit pour $n \in \mathbb{N}$, celle de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$. Puis, par continuité de λf (où f continue sur $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$) celle des fonctions de la forme $x \mapsto \lambda x^n$ et par somme on obtient bien la continuité des fonctions polynômes.
- La continuité des fonctions rationnelles (sur des intervalles convenables) découle de la continuité du quotient.

Exemple :

Soit f la fonction définie par : $$f(x)=\frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2+1}$$

Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

On procède ainsi :

- L'application $x \longmapsto x^4+x^2+1$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
- L'application $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. (Vu plus haut)

Par composition, on en déduit la continuité de $x \longmapsto \sqrt{x^4+x^2+1}$.

L'application $x \longmapsto x^2+1$ est continue et non nulle sur $\mathbb{R}$.

Par quotient, on en déduit la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

4¯me annee

3. Limite d'une suite et fonction continue

3.1. Théorème *Suites et applications continues*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Soit (u_n) une suite d'éléments de I qui converge vers un réel $\ell \in I$.

Alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$, autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n)=f(\ell)$$

L'idée de ce théorème est que pour que l'on puisse permuter les symboles f et lim, il suffit que f soit continue.

Démonstration (Hors programme)

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, comme f est continue en ℓ, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$(|x-\ell|<\eta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(\ell)|<\varepsilon)$$

Mais la suite (u_n) converge vers ℓ. Donc pour ce réel η ci-dessus, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant N \;\Rightarrow\; |u_n-\ell|<\eta$$

On a donc, par transitivité des implications :

$$n \geqslant N \;\Rightarrow\; |f(u_n)-f(\ell)|<\varepsilon$$

Ceci prouve que la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Exemple 1 : *cas où f est continue*

Déterminer la limite de la suite (v_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

Cette suite est bien définie puisque, pour $n \geqslant 1$, on a $\frac{1}{n} \in]0\,;1]$, donc $\sin\left(\frac{1}{n}\right)>0$.

$$v_n=\sqrt{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Ecrivons : $$n\sin\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

Or, on sait que $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ donc : $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1$$

D'où : $$\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)=1$$

Par ailleurs, l'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0, par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)} = \sqrt{1} = 1$$

Exemple 2 : *cas où f n'est pas continue*

Déterminer la limite de la suite (v_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$v_n = E\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

On sait que : $$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$$

Malheureusement, la fonction E n'est pas continue en 1. Le théorème précédent ne peut donc s'appliquer... Et la suite (v_n) ne converge pas vers 1 mais vers 0. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leqslant 1 - \frac{1}{n} < 1$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $$E\left(1-\frac{1}{n}\right) = 0$$

La suite (v_n) est donc constante égale à 0. Donc sa limite est 0.

Exemple 3 : *utilisation du théorème pour prouver, par l'absurde, qu'une fonction n'est pas continue*

Soit $\lambda \in [-1, 1]$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ \lambda \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Démontrer que f n'est pas continue en 0.

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

On a : $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$$

Or, $f(u_n) = 1$ et $f(v_n) = -1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = -1$

Si f était continue en 0, on devrait avoir : $$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(0)$$

C'est-à-dire : $$1 = \lambda$$

De même, on devrait avoir : $$\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = f(0)$$

C'est-à-dire : $$-1 = \lambda$$

D'où une contradiction. Donc f n'est pas continue en 0.

Exemple 4 : *équation aux "points fixes" pour une suite récurrente*

Soit (u_n) une suite définie par son premier terme u_0 et une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Par exemple : $$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$ avec u_0, a et b dans $\mathbb{R}$.

Sur cet exemple, on a f affine : $f(x) = ax + b$

Si f est **continue sur un intervalle I tel que $f(I) \subset I$** alors si la suite converge vers un réel ℓ, ce réel ℓ vérifie la relation :
$$f(\ell) = \ell$$

En effet, la condition $f(I) \subset I$ assure que la suite (u_n) est bien définie et la condition f continue sur I permet de passer à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour obtenir $f(\ell) = \ell$.

Dans l'exemple des suites arithmético-géométriques ci-dessus ($u_{n+1} = au_n + b$), la limite éventuelle ℓ vérifie donc :
$$\ell = a\ell + b$$

Et si $a \neq 1$:
$$\ell = \frac{b}{1-a}$$

Bien sûr, la relation $f(\ell) = \ell$ ne donne que les valeurs possibles pour l'éventuelle limite ℓ ; une preuve de la convergence de la suite doit être faite en sus.

4. Théorème des valeurs intermédiaires

4.1. Théorème des valeurs intermédiaires :

Soient I un intervalle, a et b dans I avec $a < b$.

Soit f une application **continue** sur l'intervalle I.

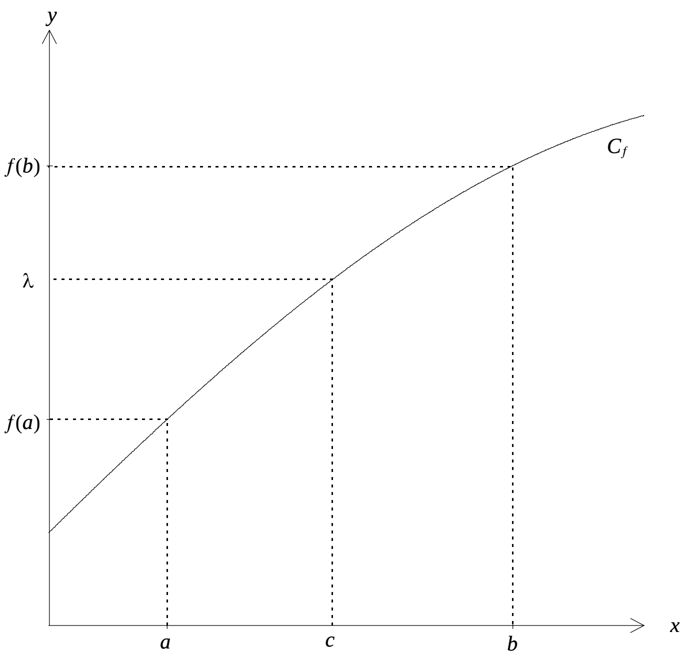
Soit λ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors :

Il existe (au moins) un réel c dans $[a, b]$ tel que : $f(c) = \lambda$.

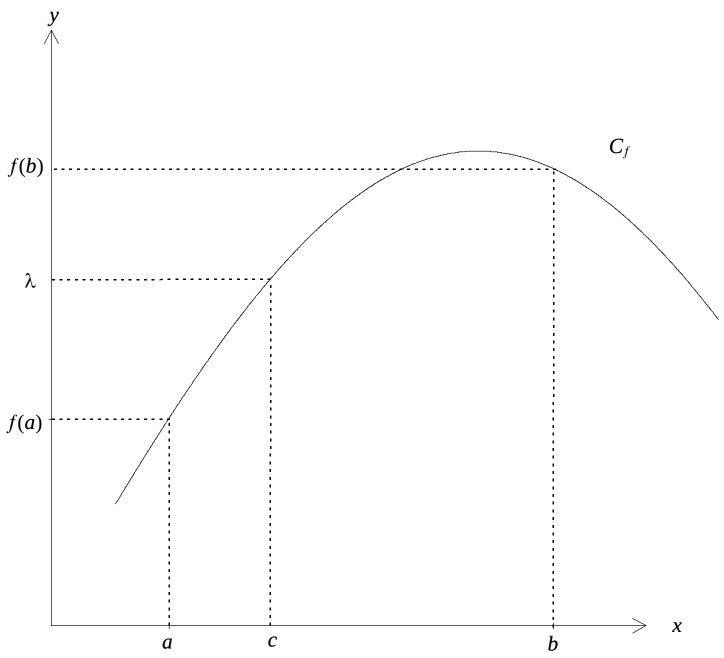
(Autrement dit : l'équation $f(x) = \lambda$ admet au moins une solution dans $[a, b]$)

Illustrations

Cas d'une fonction monotone



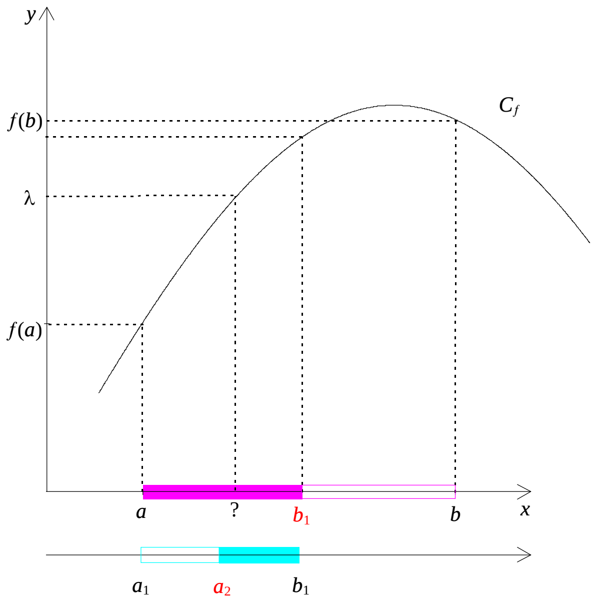
Cas d'une fonction non monotone



Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires :

Supposons $f(a) < f(b)$. (Quitte à poser $g = -f$ sinon)

Nous allons construire deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) par l'algorithme suivant :



- Si le milieu m de l'intervalle $[a, b]$ est tel que $f(m) \geqslant \lambda$ alors on pose $a_1 = a$ et $b_1 = m$
- Sinon, on pose $a_1 = m$ et $b_1 = b$.

On a ainsi $a \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b$ et $f(a_1) \leqslant \lambda \leqslant f(b_1)$.

On recommence le découpage :

- Si le milieu m de l'intervalle $[a_1, b_1]$ est tel que $f(m) \geqslant \lambda$ alors on pose $a_2 = a_1$ et $b_2 = m$
- Sinon, on pose $a_2 = m$ et $b_2 = b_1$.

On a ainsi : $a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant b_1 \leqslant b$ et $f(a_2) \leqslant \lambda \leqslant f(b_2)$.

En réitérant ce procédé, on construit ainsi une suite de segments emboîtés :

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

Il s'agit d'une méthode de dichotomie.

De plus, par construction, la longueur de $[a_n, b_n]$ est $\dfrac{b-a}{2^n}$.

Les segments $[a_n, b_n]$ ont donc des longueurs qui tendent vers 0. Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes.

Notons c leur limite commune (ce réel c est dans l'intervalle $[a, b]$)

Montrons que $f(c) = \lambda$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f(a_n) \leqslant \lambda \leqslant f(b_n)$

Par passage à la limite : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) \leqslant \lambda \leqslant \lim\limits_{n \to +\infty} f(b_n)$

Or, f est continue en c, donc : $f(c) \leqslant \lambda \leqslant f(c)$

Donc : $f(c) = \lambda$

On a donc bien montré qu'il existe un réel c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

Remarque : l'hypothèse de continuité est indispensable dans le théorème. Essayer d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction "partie entière" avec $a = 0$, $b = 1$ et $\lambda = \dfrac{1}{2}$ ...

Exemple d'application du théorème des valeurs intermédiaires :

Toute fonction polynôme P (à coefficients réels) de degré impair admet (au moins) une racine réelle.

En effet, comme le degré de P est impair, on a :

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$$

En conséquence, il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x < a$, on ait $P(x) < 0$ et un réel $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > b$, on ait $P(x) > 0$. Comme P est une fonction continue, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer l'existence d'un réel $c \in]a\ ;\ b[$ tel que $P(c) = 0$.

Le théorème des valeurs intermédiaires n'admet pas de réciproque. Une fonction f peut très bien vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue. Considérer par exemple la fonction f définie sur $I = \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ x_0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (\text{où } x_0 \in [-1\ ;\ 1])$$

Cette fonction f est non continue en 0 (voir exemple 3 du paragraphe 3 ci-dessus), et vérifie pourtant la propriété des valeurs intermédiaire.

En effet, soient a et b deux réels avec $a < b$.

- Si a et b sont non nuls et de même signe, alors c'est immédiat (puisque dans ce cas f est continue sur $[a\ ;\ b]$).
- Si $a = 0$ (et $b > 0$) alors prenons un réel λ compris entre $f(a) = x_0$ et $f(b)$.
  Comme $\lambda \in [-1\ ;\ 1]$, on peut toujours trouver un réel $X \geqslant \dfrac{1}{b}$ tel que $\sin X = \lambda$. En posant $x = \dfrac{1}{X}$, il vient bien $f(x) = \lambda$ avec $x \in [a\ ;\ b]$.
- On raisonne de même si on a un intervalle du type $[a\ ;\ 0]$ ou $[a\ ;\ b]$ lorsqu'il contient 0.

4.2. Application : le théorème des valeurs intermédiaires permet de démontrer un petit théorème de point fixe :

Théorème du point fixe

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$.

Si $f(I) \subset I$, alors f admet (au moins) un point fixe sur I. (C'est-à-dire : il existe (au moins) un réel x de I tel que $f(x) = x$)

Démonstration :

Considérons la fonction g définie sur I par : $g(x) = f(x) - x$

Montrons que $0 \in g(I)$. On a : $g(a) = f(a) - a \in g(I)$ et $g(b) = f(b) - b \in g(I)$

Or, comme $f(I) \subset I$, on a $f(a) \geqslant a$ et $f(b) \leqslant b$, c'est-à-dire $g(a) \leqslant 0$ et $g(b) \geqslant 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $x \in I$ tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x$.

4.3. Corollaire *Image d'un intervalle par une application continue*

Soit f une application **continue** sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle.

$f(I) = \{f(x) \text{ où } x \in I\}$
(Ensemble des images de $x \in I$)

Démonstration :

Soient y_1 et y_2 dans $f(I)$ avec $y_1 \leqslant y_2$.

Il s'agit de montrer tout élément λ de $[y_1, y_2]$ est élément de $f(I)$.

Comme y_1 et y_2 sont dans $f(I)$, il existe a et b dans I tels que :

$$f(a) = y_1 \text{ et } f(b) = y_2$$

Comme I est un intervalle, on a : $[a, b] \subset I$

Comme f est continue sur $[a, b]$ (puisque $[a, b] \subset I$), on a, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\text{pour tout } \lambda \in [y_1, y_2], \text{ il existe } c \in [a, b] \text{ tel que } f(c) = \lambda.$$

D'où : $\lambda \in f(I)$

Donc $f(I)$ est bien un intervalle.

<u>Contre-exemple</u> : si f n'est pas continue, il se peut très bien que $f(I)$ ne soit pas un intervalle : avec $f(x) = E(x)$, $E(x)$ désignant la partie entière de x, on a $f([0 ; 1]) = \{0 ; 1\}$.

<u>Exemples</u> : $f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$

- Image de l'intervalle ouvert $I =]1 ; 2[$: $f(I) =]1 ; 4[$
- Image de l'intervalle ouvert $J =]-1 ; 2[$: $f(J) = [0 ; 4[$
- Image de l'intervalle fermé $H = [-2 ; 2]$: $f(H) = [0 ; 4]$
- Image de l'intervalle (fermé) $K = [0 ; +\infty[$: $f(K) = K$

$$g(x) = \sin x \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

- Image de l'intervalle ouvert $I =]0 ; \pi[$: $g(I) =]0 ; 1]$
- Image de l'intervalle ouvert $J =]0 ; 2\pi[$: $g(J) = [-1 ; 1]$

$$h(x) = \frac{x}{1+|x|} \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

Déterminer $f(\mathbb{R})$.

Attardons-nous un moment sur cette fonction h :

$\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$h(-x) = \frac{-x}{1+|-x|} = -\frac{x}{1+|x|} = -h(x)$$

Ce qui prouve que h est impaire.

Montrons que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$: soient x et y dans $\mathbb{R}_+$. Supposons : $0 \leqslant x < y$.

Alors : $$h(y) - h(x) = \frac{y}{1+y} - \frac{x}{1+x} = \frac{y(1+x) - x(1+y)}{(1+x)(1+y)} = \frac{y-x}{(1+x)(1+y)}$$

Or, $y - x > 0$ d'où : $$h(y) - h(x) > 0$$
$$h(x) < h(y)$$

Ceci prouve la stricte de croissance de h sur $\mathbb{R}_+$.

Comme h est impaire, on en déduit qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, on a : $$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x} = 1$$

Et, h étant impaire : $$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -1$$

Montrons que h est bornée par -1 et 1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

Il est clair que : $0 \leqslant x < 1 + x$

En divisant par $1 + x > 0$: $$0 \leqslant \frac{x}{1+x} < 1$$

Et comme $x = |x|$ (puisque $x \geqslant 0$) : $0 \leqslant h(x) < 1$

Comme h est impaire, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-1 < h(x) < 1$$

Donc h est bornée par -1 et 1 (mais elle n'atteint pas ses bornes)

On a donc $h(\mathbb{R}) \subset]-1 ; 1[$. Réciproquement soit $y \in]-1 ; 1[$. Comme h est continue (quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas), le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer l'existence d'un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) \in y$. Donc $]-1 ; 1[\subset h(\mathbb{R})$.

D'où : $$h(\mathbb{R}) =]-1 ; 1[$$

Sur les exemples ci-dessus, on s'aperçoit que l'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue peut être un intervalle ouvert ou semi-ouvert ou fermé. Qu'en est-il des intervalle fermés ? Ont-ils toujours pour image des intervalles fermés ? L'exemple de la fonction h ci-dessus et de l'intervalle $\mathbb{R}$ (qui est ouvert et fermé) montre que l'image continue d'un intervalle fermé peut très bien être un intervalle ouvert. Cependant si notre intervalle fermé est borné...

4.4. Théorème *Image d'un segment par une application continue*

Soit f une application continue sur un segment I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Alors $f(I)$ est un segment.

Est appelé segment tout intervalle fermé et borné.

Démonstration

C'est une application du théorème des segments emboîtés et du théorème de Bolzano-Weierstrass et c'est vraiment mais alors là vraiment hors programme. On utilise souvent ce théorème en disant qu'une fonction continue sur un intervalle est bornée et atteint ses bornes.

5. Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle

5.1. Théorème *Théorème de bijection*

Soit f une application **continue** et *strictement monotone* sur un intervalle I.

Soient a et b dans I avec $a < b$.

Soit λ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors

Il **existe** un *unique* c dans $[a, b]$ tel que : $f(c) = \lambda$

(Autrement dit : l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution dans $[a, b]$)

Lorsque f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, chaque élément de I a donc **une et une seule** image. On dit que f est une bijection de I sur $f(I)$.

Démonstration

- L'existence a déjà été prouvée : c'est le théorème des valeurs intermédiaires.
- L'unicité découle de la stricte monotonie. Prouvons-là dans le cas où f est strictement croissante (le cas f strictement décroissante est analogue).

  Supposons qu'il existe deux réels c et c' dans $[a, b]$ tels que $f(c) = \lambda$ et $f(c') = \lambda$.

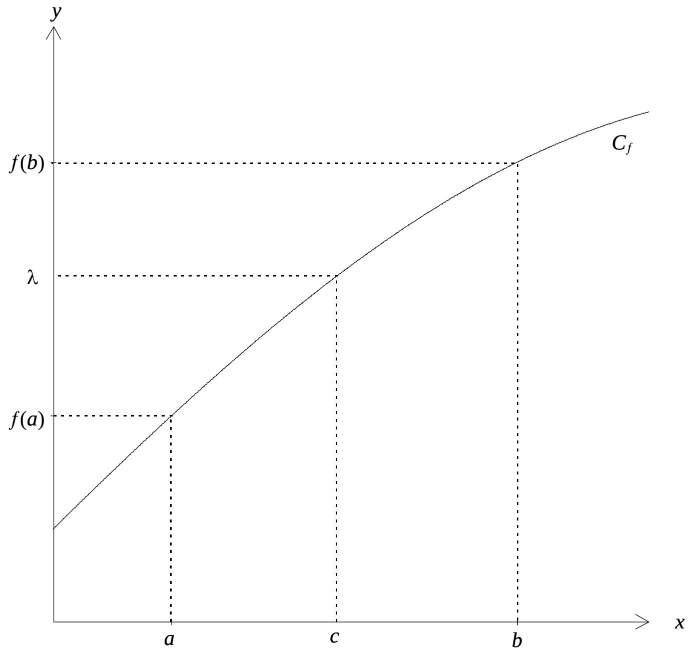
  Si $c < c'$ alors par stricte croissance de f : $f(c) < f(c')$

  Ce qui contredit la condition $f(c) = f(c') = \lambda$.

  Si $c > c'$ alors par stricte croissance de f : $f(c) > f(c')$

  Ce qui contredit la condition $f(c) = f(c') = \lambda$.

Finalement $c = c'$ ce qui prouve l'unicité.



En résumé, lorsque f est une fonction définie sur un intervalle I, et lorsque $\lambda \in f(I)$, l'hypothèse de continuité de f nous fournit l'existence d'au moins une solution (dans I) de l'équation $f(x) = \lambda$. Si l'on ajoute l'hypothèse de stricte monotonie de f, nous sommes alors assurés de l'unicité de cette solution.

Dans le cas où f est une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I, on a donc un moyen simple de déterminer l'image d'un intervalle $[a\,;\,b]$:

$$f([a\,;\,b]) = [f(a)\,;\,f(b)] \text{ lorsque } f \text{ est strictement croissante}$$

$$f([a\,;\,b]) = [f(b)\,;\,f(a)] \text{ lorsque } f \text{ est strictement décroissante}$$

Ce résultat s'étend aux intervalles non bornés en remplaçant les valeurs de f par ses limites.

5.2. Corollaire

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a\,;\,b]$.

Si $f(a)f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans I.

Démonstration :

Si $f(a)f(b) < 0$, cela signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. Autrement dit, 0 est intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$. On conclut avec le théorème de bijection.

Exemple :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1 + x)^3 + x$

Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1\,;\,0]$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Solution :

La fonction g clairement continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (comme somme et composée de fonctions qui le sont). De plus : $g(-1) = -1 < 0$ et $g(0) = 1 > 0$. Le réel $\lambda = 0$ est donc bien compris entre $g(-1)$ et $g(0)$.

On en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1\,;\,0]$:

x	$-\infty$	-1	α	0	$+\infty$
signe de la dérivée g'			+		
variations de g		-1	0	1	

Guesmi.B

Encadrement de α d'amplitude 10^{-1} à l'aide d'un petit tableau de valeurs : (méthode du balayage)

x	$-0{,}9$	$-0{,}8$	$-0{,}7$	$-0{,}6$	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}2$	$-0{,}1$
$g(x)$	$-0{,}899$	$-0{,}792$	$-0{,}673$	$-0{,}536$	$-0{,}375$	$-0{,}184$	$0{,}043$	$0{,}312$	$0{,}629$

Les valeurs de $g(x)$ sont arrondies à 10^{-3}.

On en déduit : $$-0{,}4 < \alpha < -0{,}3$$

<u>5.3. Théorème</u> (Hors programme)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On a :

$$f \text{ strictement monotone sur } I \Leftrightarrow f \text{ bijective sur } I$$

<u>Démonstration</u> :

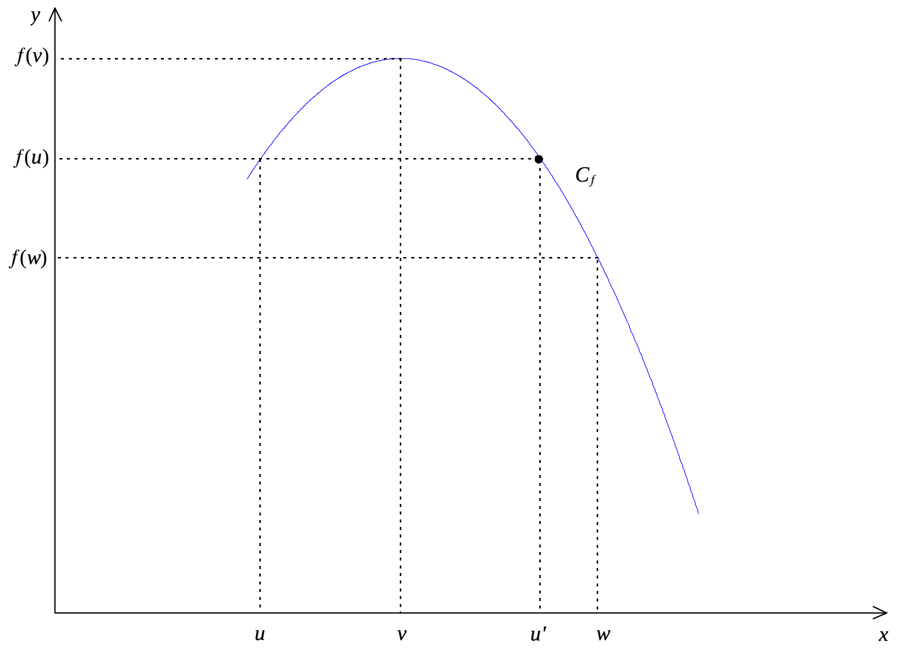
L'implication directe est le théorème de bijection (5.1.). Réciproquement, supposons f bijective sur I.

Si f n'était pas strictement monotone sur I, on pourrait trouver des réels u, v et w de I tels que $u < v < w$ et par exemple : $$f(w) \leqslant f(u) \leqslant f(v)$$

(Quitte à remplacer dans les autres cas f par $-f$ ou f par $x \longmapsto f(-x)$ où les deux !)

Le réel $f(u)$ étant compris entre $f(w)$ et $f(v)$, le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue f sur l'intervalle $[v, w]$ assure l'existence d'un réel u' dans $[v, w]$ tel que $f(u') = f(u)$.

Il existerait alors deux réels **distincts** u et u' de I ayant la même image, ce qui contredit le fait que f est bijective sur I. En conséquence, f est strictement monotone sur I.



<u>5.4. Théorème</u> *Continuité de la fonction réciproque (hors programme)*

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

Alors la bijection réciproque f^{-1} de f est :

- strictement monotone sur $f(I)$, de même sens de variation que f.
- continue sur $f(I)$.

Démonstration :

Comme f est continue sur I, sa stricte monotonie entraîne sa bijectivité (d'après 5.3.), ce qui assure l'existence de la fonction réciproque f^{-1}.

- Supposons f strictement croissante sur I.

  Soient y_1 et y_2 dans $f(I)$ tels que : $y_1 < y_2$

  Notons $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$. On a ainsi :

$$\frac{f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}$$

  Le dernier rapport est strictement positif puisque f est strictement croissante sur I. On en déduit que :

$$f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1) > 0$$

  Ce qui prouve que f^{-1} est strictement croissante sur $f(I)$.

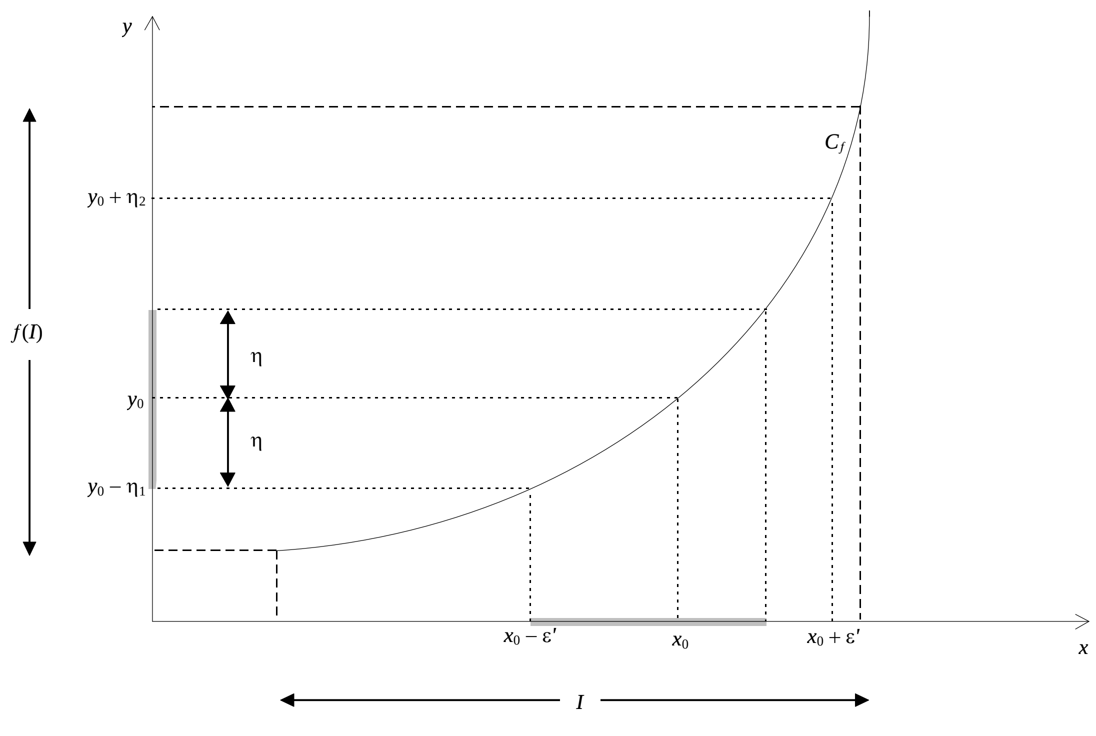
  On raisonne de même si f est strictement décroissante sur I (le rapport est alors négatif).

- Supposons toujours f strictement croissante sur I.

  Fixons $y_0 \in f(I)$.

  Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Pour prouver la continuité de f^{-1} en y_0, nous devons montrer que :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall y \in f(I) : |y - y_0| < \eta \ \Rightarrow\ |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$$



Notons $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

Premier cas : x_0 est à l'intérieur de I

Dans ce cas, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\ \subset I$

Notons $\varepsilon' = \min\{\alpha\ ;\ \varepsilon\}$, ainsi : $]x_0 - \varepsilon', x_0 + \varepsilon'[\ \subset I$

On a les équivalences suivantes (la dernière découlant du fait que f est strictement croissante sur I) :

$$|x - x_0| < \varepsilon' \ \Leftrightarrow\ x \in\ ]x_0 - \varepsilon', x_0 + \varepsilon'[\ \Leftrightarrow\ x_0 - \varepsilon' < x < x_0 + \varepsilon' \ \Leftrightarrow\ f(x_0 - \varepsilon') < f(x) < f(x_0 + \varepsilon')$$

Notons $y = f(x)$, $\eta_1 = y_0 - f(x_0 - \varepsilon') = f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon') > 0$ et $\eta_2 = f(x_0 + \varepsilon') - y_0 = f(x_0 + \varepsilon') - f(x_0) > 0$.

(η_1 et η_2 sont strictement positifs car f est strictement croissante sur I)

Ainsi : $$|x - x_0| < \varepsilon' \iff y_0 - \eta_1 < y < y_0 + \eta_2$$

On sait que $y_0 - \eta_1$ et $y_0 + \eta_2$ sont dans $f(I)$. Comme f est continue sur I, $f(I)$ est un intervalle, donc :

$$]y_0 - \eta_1 ; y_0 + \eta_2[\subset f(I)$$

η_1 et η_2 et donc η ne dépendent que de y_0.

Notons $\eta = \min\{\eta_1 ; \eta_2)$. On a donc également :

$$]y_0 - \eta ; y_0 + \eta[\subset f(I)$$

Ainsi, on a, pour tout $y \in f(I)$:

$$|y - y_0| < \eta \Rightarrow y_0 - \eta < y < y_0 + \eta \Rightarrow y_0 - \eta_1 < y < y_0 + \eta_2 \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon' \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon$$

C'est à dire : $$|y - y_0| < \eta \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$$

<u>Deuxième cas</u> : x_0 est une borne de I

Supposons que x_0 soit la borne inférieure de I (le cas où x_0 est la borne supérieure de I s'adapte facilement de celui-ci). Notons qu'alors, comme f est strictement croissante sur I, y_0 est la borne inférieure de $f(I)$.

Dans ce cas, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $$]x_0, x_0 + \alpha[\subset I$$

Notons $\varepsilon' = \min\{\alpha ; \varepsilon\}$, ainsi : $$]x_0, x_0 + \varepsilon'[\subset I$$

On a les équivalences suivantes (la dernière découlant du fait que f est strictement croissante sur I) :

$$x \in]x_0, x_0 + \varepsilon'[\iff x_0 \leqslant x < x_0 + \varepsilon' \iff f(x_0) \leqslant f(x) < f(x_0 + \varepsilon')$$

Notons $y = f(x)$, $\eta = y_0 - f(x_0 - \varepsilon') = f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon') > 0$.

Ainsi : $$x \in [x_0, x_0 + \varepsilon'[\iff y_0 \leqslant y < y_0 + \eta$$

On sait que $y_0 + \eta$ est dans $f(I)$. Comme f est continue sur I, $f(I)$ est un intervalle, donc :

$$[y_0 ; y_0 + \eta[\subset f(I)$$

Ainsi, on a, pour tout $y \in f(I)$:

$$|y - y_0| < \eta \overset{y \in f(I)}{\Rightarrow} y_0 \leqslant y < y_0 + \eta \Rightarrow x_0 \leqslant x < x_0 + \varepsilon' \Rightarrow x_0 \leqslant x < x_0 + \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon$$

C'est à dire : $$|y - y_0| < \eta \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$$

<u>Bilan</u> : dans tous les cas, on a montré :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in f(I) : |y - y_0| < \eta \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$$

Ce raisonnement étant valable pour tout y_0 de $f(I)$, la fonction réciproque f^{-1} est donc continue sur $f(I)$.

Si f est strictement décroissante, on se ramène au cas précédent en raisonnant avec $-f$.

<u>Technique de détermination de la fonction réciproque</u> : (donnée sur un exemple)

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

On montre facilement que f est continue et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$. Elle admet donc une bijection réciproque qui est définie sur $f(]1, +\infty[) =]2, +\infty[$. Pour la déterminer, on note $y = f(x)$ puis on exprime x en fonction de y :

$$y = \frac{2x+1}{x-1} \overset{x>1}{\iff} xy - y = 2x + 1 \iff x(y - 2) = y + 1$$

Et comme $y \neq 2$ (examiner l'équation $f(x) = 2$...), on a :

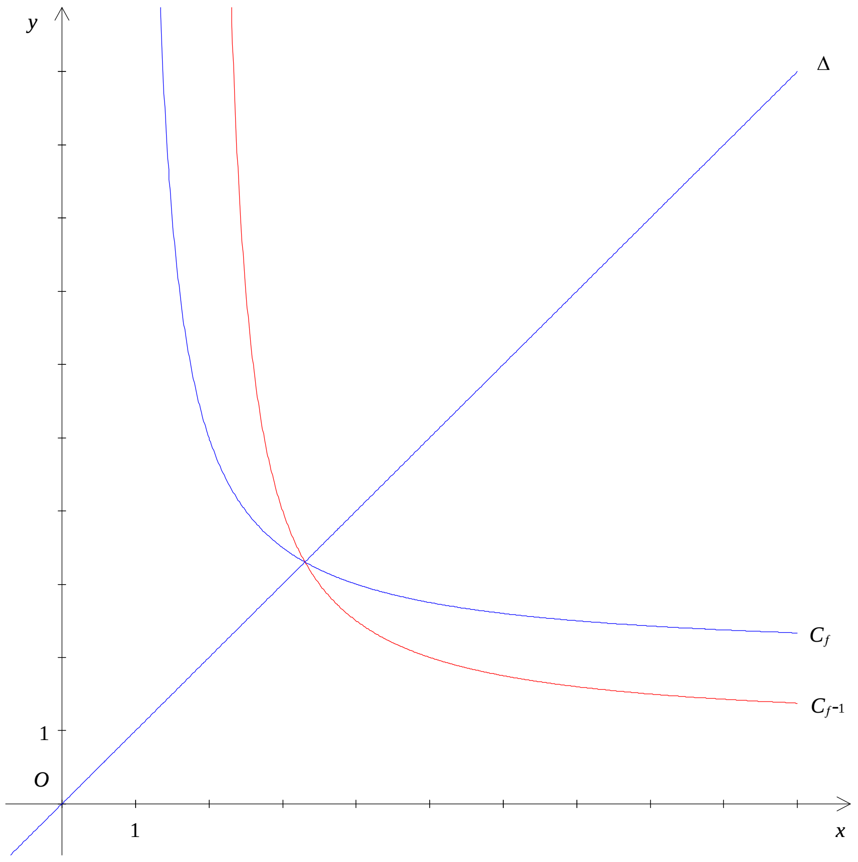
$$y = \frac{2x+1}{x-1} \iff x = \frac{y+1}{y-2}$$

La fonction réciproque f^{-1} de f est donc définie pour $y \in \,]2, +\infty[$ par :

$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-2}$$

Ou encore : $$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}, \; x \in]2, +\infty[$$

Remarque : on peut vérifier que $f \text{ o } f^{-1} = \mathrm{Id}_{]2, +\infty[}$ et $f^{-1} \text{ o } f = \mathrm{Id}_{]1, +\infty[}$.



Propriété : dans un repère **orthonormal**, les représentations graphiques de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation : $y = x$ (dite "première bissectrice").

En effet : $$M(x, y) \in C_f \iff y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \iff M'(y, x) \in C_{f^{-1}}$$

On constate alors que le milieu I du segment $[MM']$ a pour coordonnées :

$$I\left(\frac{x+y}{2}; \frac{x+y}{2}\right)$$

Donc : $$I \in \Delta$$

Et comme le repère est orthonormal, on a, en notant $\vec{u} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ un vecteur directeur de la droite Δ :

$$\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = (y - x) \times 1 + (x - y) \times 1 = 0$$

Ce qui prouve que Δ est la médiatrice du segment $[MM']$ d'où le résultat annoncé.