Exercices - Coniques : corrigé

Équations des coniques

Exercice 1 - Réduction de l'équation d'une conique -

1. Le discriminant de cette conique est -3. Elle est donc du genre ellipse. On commence par tourner le repère. Pour cela, on remarque que les coefficients devant x^2 et y^2 sont égaux. On en déduit que le changement de repère approprié est celui obtenu par une rotation d'angle $\pi/4$, soit en posant :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{\sqrt{2}}{2}X-\frac{\sqrt{2}}{2}Y\\ y &=& \frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}Y. \end{array}\right.$$
En remplaçant dans l'équation initiale, on trouve :
$$\frac{X^2}{2}+\frac{Y^2}{2/3}=1.$$
On obtient donc une ellipse centré en 0, de demi-grand axe $a=\sqrt{2}$ et de demi-petit axe $\sqrt{2}/\sqrt{3}$. Les axes de l'ellipse sont les axes (OX) et (OY), c'est-à-dire dans le repère initial les droites $y=x$ et $y=-x$.
2. Le discriminant de cette conique vaut $3/4>0$. Elle est donc du genre hyperbole. On élimine les termes en xy par rotation du repère. On fait une rotation d'angle θ tel que
$$\tan(2\theta)=\frac{b}{a-c}=\sqrt{3}$$
soit une rotation d'angle $\pi/6$. On obtient alors
$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{2}(X\sqrt{3}-Y)\\ y &=& \frac{1}{2}(X+Y\sqrt{3}). \end{array}\right.$$
On obtient après simplifications l'équation
$$\frac{3}{4}X^2-\frac{1}{4}Y^2+\frac{\sqrt{3}}{4}X-\frac{Y}{4}=1.$$
En reconnaissant le début du développement de deux carrés, on trouve
$$\frac{3}{4}\left(X+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)-\frac{1}{4}\left(Y+\frac{1}{2}\right)^2=1.$$
On a donc une hyperbole dont le centre a pour coordonnées dans le nouveau repère $(-\sqrt{3}/6;-1/2)$ et dont les asymptotes sont les droites d'équation $Y=\pm 3X$ ($a=4/3$, $b=4$, $b/a=3$).
3. Le discriminant de cette conique est $4-4\times 0=4>0$. Elle est donc du genre hyperbole. On commence par tourner le repère. Pour cela, on remarque que les coefficients devant x^2

et y^2 sont égaux. On en déduit que le changement de repère approprié est celui obtenu par une rotation d'angle $\pi/4$, soit en posant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{\sqrt{2}}{2}X-\frac{\sqrt{2}}{2}Y\\ y &=& \frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}Y. \end{array}\right.$$

En remplaçant dans l'équation initiale, on trouve :

$$X^2-Y^2+2X+2Y=1.$$

On reconnait le début du développement d'un carré, et la relation précédente s'écrit

$$(X+1)^2-(Y-1)^2=1.$$

On a donc une hyperbole, de centre $(-1,1)$ dans le nouveau repère (c'est-à-dire $(-\sqrt{2},0)$ dans l'ancien), d'asymptotes les droites d'équation $(Y-1)=\pm(X+1)$.

4. Le discriminant de cette conique vaut 0 : elle est du genre parabole. On élimine les termes en xy par rotation du repère. On fait une rotation d'angle θ tel que

$$\tan(2\theta)=\frac{b}{a-c}=\sqrt{3}$$

soit une rotation d'angle $\pi/6$. On obtient alors

Guesmi.B

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{2}(X\sqrt{3}-Y)\\ y &=& \frac{1}{2}(X+Y\sqrt{3}). \end{array}\right.$$

En remplaçant dans l'équation on obtient, après simplifications,

$$\begin{array}{rcl} Y^2-6X+2Y+13=0 &\iff& (Y+1)^2-1-6X+13=0\\ &\iff& (Y+1)^2=6(X-2). \end{array}$$

On obtient une parabole de sommet ayant pour coordonnées $(2,-1)$ dans le nouveau repère, et de paramètre 3.

Exercice 2 - Une conique à paramètres - *L2/Math Sup* - ⋆⋆

1. Le discriminant de la conique vaut $\Delta=(2a)^2-4=4(a^2-1)$. La conique est donc du type ellipse si $|a|<1$, du type parabole si $|a|=1$, du type hyperbole si $|a|>1$. Dans tous les cas, on peut réduire l'équation de la conique en effectuant une rotation du repère d'angle $\pi/4$, soit en posant

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{\sqrt{2}}{2}X-\frac{\sqrt{2}}{2}Y\\ y &=& \frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}Y. \end{array}\right.$$

L'équation de la conique devient

$$(1+a)X^2+(1-a)Y^2+2\sqrt{2}X-2\sqrt{2}Y-a^2=0.$$

2. On obtient une parabole lorsque $a=\pm1$.

- Si $a=1$, une translation $X'=X+\sqrt{2}/2$ et $Y'=Y+\sqrt{2}/2$ donne l'équation réduite de la parabole $X'^2=\sqrt{2}Y'$. On en déduit le paramètre $p=\sqrt{2}/2$, le foyer $X'_F=0$, $Y'_F=\sqrt{2}/4$, soit $x_F=-1/4$ et $y_F=-3/4$, la directrice $x-y=2$.
- Si $a=-1$, on effectue la translation $X'=X$ et $Y'=Y+\sqrt{2}/2$ et on obtient l'équation réduite $Y'^2=\sqrt{2}X'$. On en déduit le paramètre $p=\sqrt{2}/2$, le foyer $x_F=-1/4$, $y_F=3/4$ et la directrice $x+y=3/2$.

3. On obtient un cercle lorsque $|a|<1$ (type ellipse) et lorsque $1+a=1-a$, soit $a=0$. L'équation devient
$$X^2+Y^2+2\sqrt{2}X-2\sqrt{2}Y=0 \iff (X+\sqrt{2})^2+(Y-\sqrt{2})^2=4.$$
On obtient alors un cercle de centre Ω avec $X_\Omega=-\sqrt{2}$ et $Y_\Omega=\sqrt{2}$, et de rayon 2.
4. Pour obtenir deux droites, il faut être du type hyperbole, c'est-à-dire vérifier $|a|>1$. Pour déterminer s'il s'agit de la réunion de deux droites, il faut encore simplifier l'équation :
$$\begin{aligned} & (1+a)X^2+(1-a)Y^2+2\sqrt{2}X-2\sqrt{2}Y-a^2=0 \\ \iff & (1+a)\left(X+\frac{\sqrt{2}}{1+a}\right)^2+(1-a)\left(Y-\frac{\sqrt{2}}{1-a}\right)^2=a^2+\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1-a} \\ \iff & (1+a)\left(X+\frac{\sqrt{2}}{1+a}\right)^2+(1-a)\left(Y-\frac{\sqrt{2}}{1-a}\right)^2=\frac{-a^4+a^2+4}{1-a^2}. \end{aligned}$$
On obtient donc la réunion de deux droites si et seulement si $|a|>1$ et $-a^4+a^2+4=0$, c'est-à-dire si et seulement $a=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}$.

Exercice 3 - Ensemble des sommets d'une famille d'ellipse - *L2/Math Sup* - ⋆⋆

L'équation réduite de l'ellipse est :
$$\lambda\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)^2+\lambda y^2=1.$$

Guesmi.B

Son centre est le point $\Omega(1/\lambda,0)$, qui parcourt donc la demi-droite $[Ox)$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}_*$. Les sommets situés sur $[Ox)$ (pour lesquels $y=0$), sont les points O et $A(2/\lambda,0)$. A parcourt lui aussi la demi-droite $[Ox)$. Les sommets pour lesquels $x=1/\lambda$ sont les points
$$B\left(\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \text{ et } C\left(\frac{1}{\lambda},-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$
Il décrivent la parabole d'équation $y=x^2$. Pour décrire les foyers, il faut distinguer le cas $\lambda\geq 1$, pour lequel $\lambda^2>\lambda$ et le cas $\lambda<1$, pour lequel $\lambda^2<\lambda$. Pour $\lambda>1$, la distance focale vaut
$$\sqrt{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}}$$
et les foyers (qui sont situés sur l'axe vertical de l'ellipse) sont les points
$$F\left(\frac{1}{\lambda},\sqrt{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}}\right) \text{ et } F'\left(\frac{1}{\lambda},-\sqrt{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}}\right).$$

Ils décrivent le cercle d'équation $x^2+y^2-x=0$. Pour $\lambda<1$, la distance focale vaut

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda}}$$

et les foyers (qui sont situés sur l'axe horizontal de l'ellipse) sont les points

$$F\left(\frac{1}{\lambda}+\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda}},0\right)\text{ et }F'\left(\frac{1}{\lambda}-\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda}},0\right).$$

Ils décrivent dans ce cas l'axe $[Ox)$.

Exercice 4 - En coordonnées polaires - *L2/Math Sup* - ⋆⋆

Pour les quatre exemples, on va se ramener à l'équation polaire d'une conique de la forme

$$\rho(\theta)=\frac{1}{1+e\cos(\theta-\phi)}.$$

Les sommets se trouvent aux points obtenus lorsque $\theta=\phi$ et $\theta=\phi+\pi$.

1. Il suffit de factoriser par deux au dénominateur, et la conique a pour équation
$$\rho(\theta)=\frac{1/2}{1+\frac{1}{2}\cos\theta}.$$
On obtient une conique d'excentricité $1/2$, c'est donc une ellipse. Les sommets sont les points de coordonnée polaire $(\theta=0,\rho=\frac{1/2}{1+1/2}=1/3)$ et $(\theta=\pi,\rho=\frac{1/2}{1-1/2}=1)$, c'est-à-dire les points de coordonnées cartésiennes $(1/3,0)$ et $(-1,0)$.
2. On applique la même méthode, mais il faut encore remarquer que $-\cos(\theta)=\cos(\theta+\pi)$. La conique a donc pour équation
$$\rho(\theta)=\frac{1/2}{1+\frac{1}{2}\cos(\theta+\pi)}.$$
C'est une ellipse d'excentricité $1/2$. Ces sommets ont pour coordonnées polaires $(\theta=\pi,\rho=\frac{1/2}{1+1/2}=1/3)$ et $(\theta=0,\rho=\frac{1/2}{1-1/2}=1)$, c'est-à-dire les points de coordonnées cartésiennes $(-1/3,0)$ et $(1,0)$.
3. Cette fois, il faut transformer le sinus en cosinus, ce que l'on fait grâce à la relation $\sin(\theta)=\cos(\theta-\pi/2)$. La conique a donc pour équation
$$\rho(\theta)=\frac{1}{1+\cos(\theta-\pi/2)}.$$
C'est une parabole, d'excentricité 1. Son sommet est atteint pour $\theta=\pi/2$, où $\rho(\theta)=\frac{1}{1+1}$. Ceci correspond au point de coordonnées cartésiennes $(0,1)$.
4. On transforme la somme :
$$\cos(\theta)+\sin(\theta)=\sqrt{2}\cos(\theta-\pi/4).$$
L'équation de la conique est donc :
$$\rho(\theta)=\frac{1}{1+\sqrt{2}\cos(\theta-\pi/4)}.$$

Il s'agit cette fois d'une hyperbole, d'excentricité $\sqrt{2}$. Ses sommets sont atteints en $\theta = \pi/4$, avec $\rho = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ et $\theta = 5\pi/4$, avec $\rho = \frac{1}{1-\sqrt{2}}$. Les coordonnées cartésiennes de ces sommets sont respectivement :

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$$

et

$$x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1}{2-\sqrt{2}} \qquad y = \frac{-\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1}{2-\sqrt{2}}.$$

Propriétés géométriques des coniques

Exercice 5 - Projections orthogonales sur les axes d'une hyperbole - *L2/Math Sup* - ⋆⋆

Dans un repère orthonormée, l'équation réduite de l'hyperbole est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Les axes de l'hyperbole sont (D) d'équation $y = -\frac{b}{a}x$ soit $bx + ay = 0$ et (D') d'équation $y = \frac{b}{a}x$, soit $-bx + ay = 0$. Soit $M(x, y)$ un point de $\mathcal{H}$. Le produit $MH \times MH'$ est encore égal à

$$\text{dist}(M, (D)) \times \text{dist}(M, (D')).$$

Or, on a des formules pour calculer ces distances :

$$\text{dist}(M, (D)) = \frac{|bx + ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \text{dist}(M, (D')) = \frac{|-bx + ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

On en déduit que

$$MH \times MH' = \frac{|a^2y^2 - b^2x^2|}{a^2 + b^2}.$$

On conclut en utilisant que M est un point de l'hyperbole, et donc que

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

On a donc prouvé que, pour tout point M de l'hyperbole,

Guesmi.B

$$MH \times MH' = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

Exercice 6 - Le miroir parabolique - *L2/Math Sup* - ⋆⋆

1. On travaille dans le repère adapté à la parabole, c'est-à-dire le repère orthonormé pour lequel le foyer a pour coordonnées $(p/2, 0)$ et la directrice a pour équation $x = -p/2$. Alors, la parabole a pour équation $y^2 = 2px$. Soit $t > 0$ tel que M soit de coordonnées $(t^2/2p, t)$. Alors H a pour coordonnées $(-p/2, t)$. La médiatrice de $[FH]$ est l'ensemble des points équidistants de F et de H. L'égalité $AF^2 = AH^2$, pour A de coordonnées (x, y), se traduit en

   $$(x - p/2)^2 + y^2 = (x + p/2)^2 + (y - t)^2 \iff -2px + 2yt - t^2 = 0.$$

   On reconnait l'équation de la tangente au point M.

2. Puisque la tangente en M est la médiatrice de $[FH]$, les demi-droites $[HF)$ et $(M,\vec{N})$ sont parallèles. On en déduit que les angles $(\overrightarrow{MI},\vec{N})$ et $(\overrightarrow{HM},\overrightarrow{HF})$ sont égaux, ainsi que les angles $(\overrightarrow{FH},\overrightarrow{FM})$ et $(\vec{N},\overrightarrow{MF})$. Or, le triangle FMH est isocèle en M, et donc $(\overrightarrow{FH},\overrightarrow{FM})=(\overrightarrow{HM},\overrightarrow{HF})$.
Ce principe est utilisé dans les "paraboles" qui concentrent les signaux émis par un satellite.

Exercice 7 - Triangle inscrit dans une ellipse - *L2/Math Sup* - ⋆⋆

Dans un repère (centré en O), l'ellipse admet une représentation paramétrée de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & a\cos t\\ y(t) & = & b\sin t\end{array}\right.$$

On suppose que M a pour coordonnées $(a\cos t, b\sin t)$ et que P a pour coordonnées $(a\cos\theta, b\sin\theta)$. On commence par chercher une relation entre t et θ exprimant que la tangente à $\mathcal{E}$ en P est parallèle à (OM). Pour cela, on remarque que la tangente à $\mathcal{E}$ en P a pour vecteur directeur $\vec{u}=\begin{pmatrix}x'(\theta)\\ y'(\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\sin\theta\\ b\cos\theta\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $O\vec{M}$ sont colinéaires, et donc leur déterminant est nul. On trouve :

$$ab\cos t\cos\theta+ab\sin t\sin\theta=ab\cos(t-\theta)=0.$$

En particulier, $t=\theta+\pi/2\ [\pi]$. Calculons maintenant l'aire du trianle MOP. Elle vaut :

$$\frac{1}{2}|\det(O\vec{M},O\vec{P})|=\frac{1}{2}|ab\cos t\sin\theta-ab\cos\theta\sin t|=\frac{ab}{2}|\sin(t-\theta)|=\frac{ab}{2}$$

puisque $t-\theta=\pi/2\ [\pi]$.

Exercice 8 - Ellipses concentriques - *L2/Math Sup* - ⋆⋆

1. Rappelons que la tangente à l'ellipse au point (x_0,y_0) a pour équation $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-1=0$. Si on suppose que la droite D d'équation $ux+vy+w=0$ est tangente à l'ellipse, il existe donc un point (x_0,y_0) de $\mathcal{E}$ tel que D est aussi la droite d'équation $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-1=0$. Ces deux équations de droite sont proportionnelles, et on en déduit $w\neq 0$ et $\frac{u}{w}=-\frac{x_0}{a^2}$ et $\frac{v}{w}=-\frac{y_0}{b^2}$. Mais le point (x_0,y_0) est sur l'ellipse, et donc $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$. Utilisant la relation précédente, on en déduit que $a^2u^2+b^2v^2-w^2=0$.
Réciproquement, si $a^2u^2+b^2v^2-w^2=0$ et $w\neq 0$, alors, s'inspirant de la preuve du sens direct, on pose $x_0=-\frac{a^2u}{w}$ et $y_0=-\frac{b^2v}{w}$. Alors on vérifie facilement que (x_0,y_0) est un point de $\mathcal{E}$, et que la droite D a aussi pour équation $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-1=0$.
2. La droite (AB) a pour équation

$$b\big(\sin(b)-\sin(a)\big)x-a\big(\cos(b)-\cos(a)\big)y-2ab\sin(b-a)=0.$$

D'après la question précédente, (AB) tangente à $\mathcal{E}$

$$\begin{array}{ll}\iff & a^2b^2\big(\sin(b)-\sin(a)\big)^2+a^2b^2\big(\cos(b)-\cos(a)\big)^2-4a^2b^2\sin^2(b-a)=0\\ \iff & 2\cos^2(b-a)-\cos(b-a)-1=0.\end{array}$$

Or, le polynôme $2x^2-x-1$ admet pour seules racines 1 et $-1/2$. La droite (AB) est tangente à $\mathcal{E}$ si et seulement $\cos(b-a)=-1/2$ (le cas $\cos(b-a)=1$ est à exclure puisque les points sont distincts), et donc on a $b-a=2\pi/3\ [2\pi]$ ou $b-a=-2\pi/3\ [2\pi]$.

3. On écrit $M(2\cos(m),2\sin(m))$, $P(2\cos(p),2\sin(p))$ et $Q(2\cos(q),2\sin(q))$. D'après la question précédente, on a, quitte à échanger le rôle de M et P, $m-p=2\pi/3\ [2\pi]$. Puisque $P\neq Q$, on a alors $m-q=-2\pi/3\ [2\pi]$. On en déduit que $q-p=4\pi/3=-2\pi/3\ [2\pi]$, et donc la droite (PQ) est tangente à l'ellipse.

Exercice 9 - Cercle orthoptique d'une ellipse - *L2/Math Sup* - ⋆⋆⋆

1. Soit $y=mx+p$ une telle droite. On cherche les points d'intersection de cette droite avec l'ellipse $\mathcal{E}$. Pour cela, on introduit cette relation dans l'équation de l'ellipse, et on trouve
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{m^2x^2+2mpx+p^2}{b^2}=1\iff (b^2+a^2m^2)x^2+2a^2mpx+(a^2p^2-a^2b^2)=0.$$
Pour que la droite soit tangente, cette équation doit avoir une unique solution, et donc son discriminant doit être nul. On trouve
$$\begin{array}{rcl}\Delta' &=& a^4m^2p^2-(a^2p^2-a^2b^2)(b^2+a^2m^2)\\ &=& -a^2p^2b^2+a^2b^4-a^4n^2b^2\end{array}$$
et ceci est nul si et seulement si
$$p=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$$
2. C'est du cours. C'est vrai si et seulement si $mm'=-1$ (ce qui peut se retrouver en écrivant un vecteur directeur de chaque droite et en écrivant qu'ils doivent être orthogonaux).
3. Soit
$$\begin{array}{rcl}y &=& mx\pm\sqrt{b^2+a^2m^2}\\ y &=& -\dfrac{x}{m}\pm\sqrt{\dfrac{a^2}{m^2}+b^2}\end{array}$$
deux droites tangentes à l'ellipse qui sont orthogonales. On cherche leur point d'intersection. En mettant les équations au carré, on trouve
$$\begin{array}{rcl}(y-mx)^2 &=& b^2+a^2m^2\\ (mx+y)^2 &=& a^2+b^2m^2.\end{array}$$
En sommant ces égalités, on trouve
$$(m^2+1)x^2+(m^2+1)y^2=(m^2+1)(a^2+b^2)$$
et donc le point d'intersection est nécessairement sur le cercle d'équation
$$x^2+y^2=a^2+b^2.$$
Réciproquement, tout point de cercle convient, il suffit de le vérifier (mais c'est un peu pénible...).

Lieux géométriques

Exercice 10 - Carré des distances aux trois côtés d'un triangle -

1. Soit $M(x,y)$ un point du plan. La distance de M à
   - (OA) vaut $|y|$;
   - (OB) vaut $|x|$;
   - (AB) vaut $\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$ (une équation de la droite (AB) étant $x+y-1=0$).

   On fait la somme des carrés de ces trois distances, et on trouve que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points (x,y) vérifiant
   $$3x^2+2xy+3y^2-2x-2y=-\frac{1}{3}.$$
   On reconnait l'équation d'une conique qui est une ellipse car son discriminant vaut $\Delta = 2^2-4\times 3\times 3=-32$ et est donc strictement négatif. Pour déterminer l'équation réduite de $\mathcal{E}$, on remarque que les coefficients devant x^2 et y^2 sont identiques. Ceci incite à faire un changement de repère par rotation de $\pi/4$, et donc les nouvelles coordonnées (X,Y) de M sont liées aux anciennes par la relation :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{\sqrt{2}}{2}X-\frac{\sqrt{2}}{2}Y\\ y &=& \frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}Y.\end{array}\right.$$
   L'équation de $\mathcal{E}$ devient
   $$4X^2+2Y^2-2\sqrt{2}X=-\frac{1}{3}$$
   soit, en regroupant les termes en X sous forme canonique, puis en multipliant les deux membres par 6 :
   $$24\left(X-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+12Y^2=1.$$
   On obtient donc une ellipse de centre Ω dont les coordonnées, dans le nouveau repère, sont $\left(\frac{\sqrt{2}}{4},0\right)$, soit, dans l'ancien repère, $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$. Son demi-grand axe vaut $1/\sqrt{12}$, et son demi-petit axe vaut $1/\sqrt{24}$.
2. Cherchons les points d'intersection de $\mathcal{E}$ avec l'axe (Ox). Dans le repère initial, ces points ont pour coordonnée $(x,0)$ et on doit résoudre l'équation
   $$3x^2-2x+1/3=0.$$
   Son discriminant est nul, donc l'équation admet une racine double, $x=1/3$. L'ellipse $\mathcal{E}$ est donc tangente à (Ox) au point $(1/3,0)$. Par symétrie de l'ellipse par rapport à la droite $y=x$ (ou par symétrie du problème), on en déduit que l'ellipse est tangente à l'axe (Oy) au point $(0,1/3)$.
3. Dans le nouveau repère, on peut paramétrer l'ellipse par
   $$\left\{\begin{array}{rcl} X(t) &=& \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{\sqrt{12}}\cos t\\ Y(t) &=& \frac{1}{\sqrt{24}}\sin(t).\end{array}\right.$$
   En utilisant les formules de changement de repère, on trouve dans l'ancien repère, après simplifications,
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) &=& \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{6}}{12}\cos t+\frac{\sqrt{3}}{12}\sin t\\ y(t) &=& \frac{1}{4}+\frac{\sqrt{6}}{12}\cot t+\frac{\sqrt{3}}{12}\sin t.\end{array}\right.$$

Exercice 11 - Lieu des centres d'un cercle -

Soit $C(x,y)$ un tel point et soit D le point de tangence du cercle à l'axe (Ox). Alors $CD = CM = CM' = x$. Soit $I(x,0)$ le projeté orthogonal de C sur l'axe (Ox). I est aussi le milieu de $[MM']$. Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle MIC, rectangle en I. On a

$$y^2 + (a/2)^2 = x^2 \implies y^2 - x^2 = -a^2/4.$$

Le point C appartient donc à l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = a^2/4$. Réciproquement, si C est un point de cette hyperbole, ses coordonnées sont de la forme

$$C = \begin{pmatrix} x \\ \pm\sqrt{x^2 - a^2/4} \end{pmatrix}.$$

Alors les points $M(x-a,0)$ et $M'(x+a,0)$ appartiennent au cercle de centre C et de rayon x. Ce cercle est tangent à (Oy) et $MM' = a$. Ainsi, on a bien prouvé que l'ensemble recherché est exactement l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = a^2/4$.

Exercice 12 - - *L2/Math Sup* **-** $\star\star$

On va travailler dans un repère orthonormé où les calculs seront le plus facile possible. Par exemple, on va prendre un repère orthonormé de centre I tel que A a pour coordonnée $(a,0)$ et B a pour coordonnée $(-a,0)$. Soit $M(x,y)$. Alors

$$MI^2 = MA \times MB \iff MI^4 = MA^2 \times MB^2$$

(tout est positif). Or,

$$MI^4 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2.$$

$$MA^2 \times MB^2 = x^4 + y^4 - 2a^2x^2 + 2a^2y^2 + y^4.$$

On a donc

$$MI = MA \times MB \iff -2a^2x^2 + a^4 + 2a^2y^2 = 0 \iff \frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2a^2} = 1.$$

On reconnait l'équation d'une hyperbole équilatère.

Guesmi.B