Comportement asymptotique d'une fonction

Guesmi.B

I Limite infinie en un réel a

a est un nombre réel, borne d'un intervalle ouvert contenu dans l'ensemble de défintion $\mathscr{D}_f$ d'une fonction et f n'est pas définie en a.

1) Définition

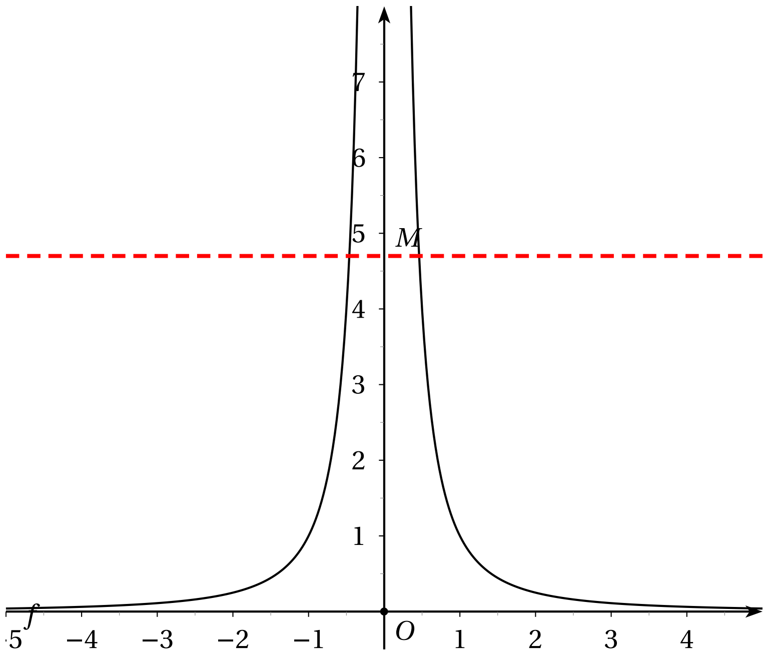
$f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers un reél a signifie que $f(x)$ peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut, dès que x est suffisamment proche de a.
On écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Traduction mathématique : $\forall M > 0, \exists \alpha > 0 \ / \ x \in]a-\alpha\ ;\ a+\alpha[\Rightarrow f(x) \geqslant M$

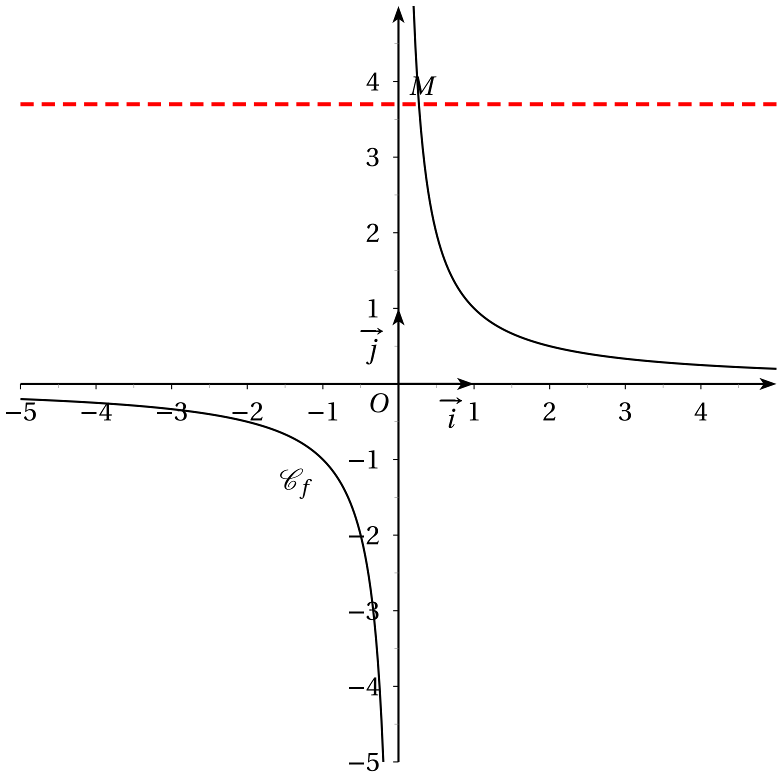
On définit de même « $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a » en appliquant la définition précédente à $-f(x)$:
$f(x)$ tend vers $-\infty$ si $-f(x)$ tend vers $+\infty$.
Écriture : on écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Exemples :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de 0 : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$



2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ au voisinage de 0 : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$.
Le graphique est l'hyperbole habituelle.



Ainsi peut-on être amené à distinguer limite à gauche et limite à droite.

2) Limites usuelles

Propriété :

(a) Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^{2n}}$ (n entier positif) ont pour limite $+\infty$ en 0.

(b) Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^{2n+1}}$ (n entier positif) ont pour limite $-\infty$ à gauche en 0 et $+\infty$ à droite en 0.

3) Asymptote verticale

Définition :

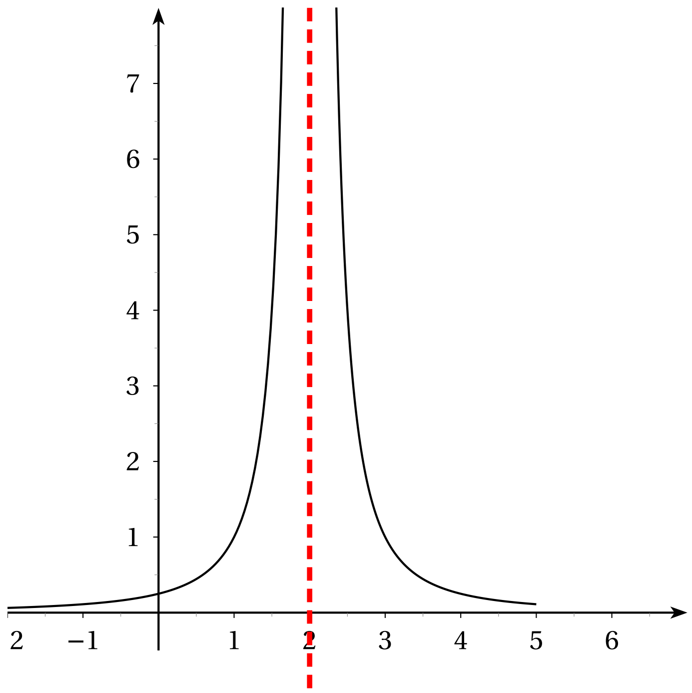
Lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

Guesmi.B

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.



Remarque : il ne suffit pas que f ne soit pas définie en a : par exemple, la fonction f défnie par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ n'est pas définie en 1, mais $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ donc il n'y pas d'asymptote verticale en 1.

II Limite finie à l'infini

1) Définition

$f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ signifie que $f(x)$ peut prendre des valeurs aussi proches de ℓ que l'on veut, dès que x est suffisamment grand.
On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

Traduction mathématique : $\forall \alpha > 0, \exists M > 0 \ / \ x > M \Rightarrow f(x) \in]\ell - \alpha \ ; \ \ell + \alpha[$

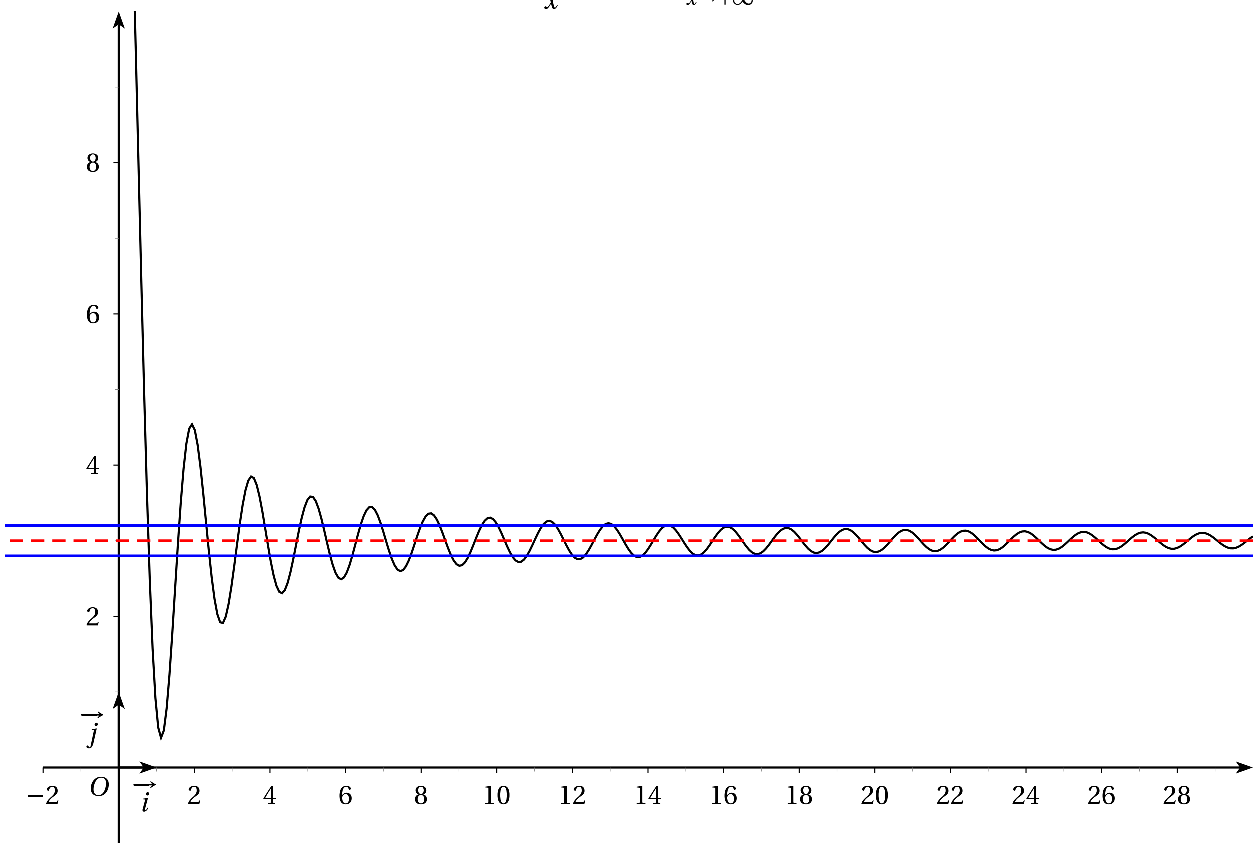
On définit de même « $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $-\infty$ » en appliquant la définition précédente à $-f(x)$.
Écriture : on écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

Graphiquement, cela signifie que $\mathscr{C}_f$ est entièrement dans la bande centrée sur ℓ et de largeur 2α ($\alpha > 0$ quelconque), pour x suffisamment grand. (voir exemple ci-dessous)

Guesmi.B

Illustration graphique :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=3+3\dfrac{\sin(4x)}{x}$. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$.



2) Limites usuelles

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ (n entier naturel positif).

3) Asymptote horizontale

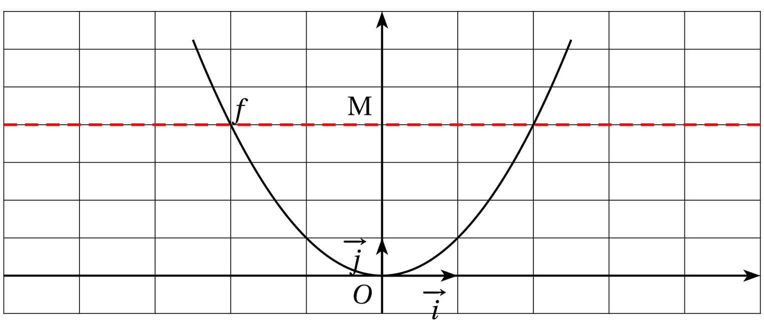
Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$, on dit que la droite d'équation $y=\ell$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$.

III Limite infinie à l'infini

1) Définition

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $f(x)$ tende vers $+\infty$ si $f(x)$ peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut pour x suffisamment grand.

Exemple : $f(x)=x^2$ dont la courbe est la parabole (étudiée en seconde).



Traduction mathématique :

$\forall M>0, \exists A>0 \ / \ x>A \Rightarrow f(x)\geqslant M$.

Guesmi.B

Remarque : on peut étendre facilement cette définition à une limite égale à $-\infty$ au voisinage de $+\infty$ ou à une limité égale à $-\infty$ au voisinage de $-\infty$ ou de $+\infty$ (en appliquant la définition précédente à $-f(x)$ et/ou avec $-x$).

2) Asymptote oblique

Il y a plusieurs façons pour une fonction de tendre vers $+\infty$ à l'infini. Nous allons étudier le cas où la courbe $\mathscr{C}_f$ se rapproche de plus en plus d'une droite oblique au voisinage de $-\infty$ ou de $+\infty$.

Définition :

La droite d'équation $\mathscr{D}$ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et/ou de $+\infty$ si la limite en $-\infty$ ou en $+\infty$ de $[f(x) - (ax + b)$ existe et si $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ et /ou $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

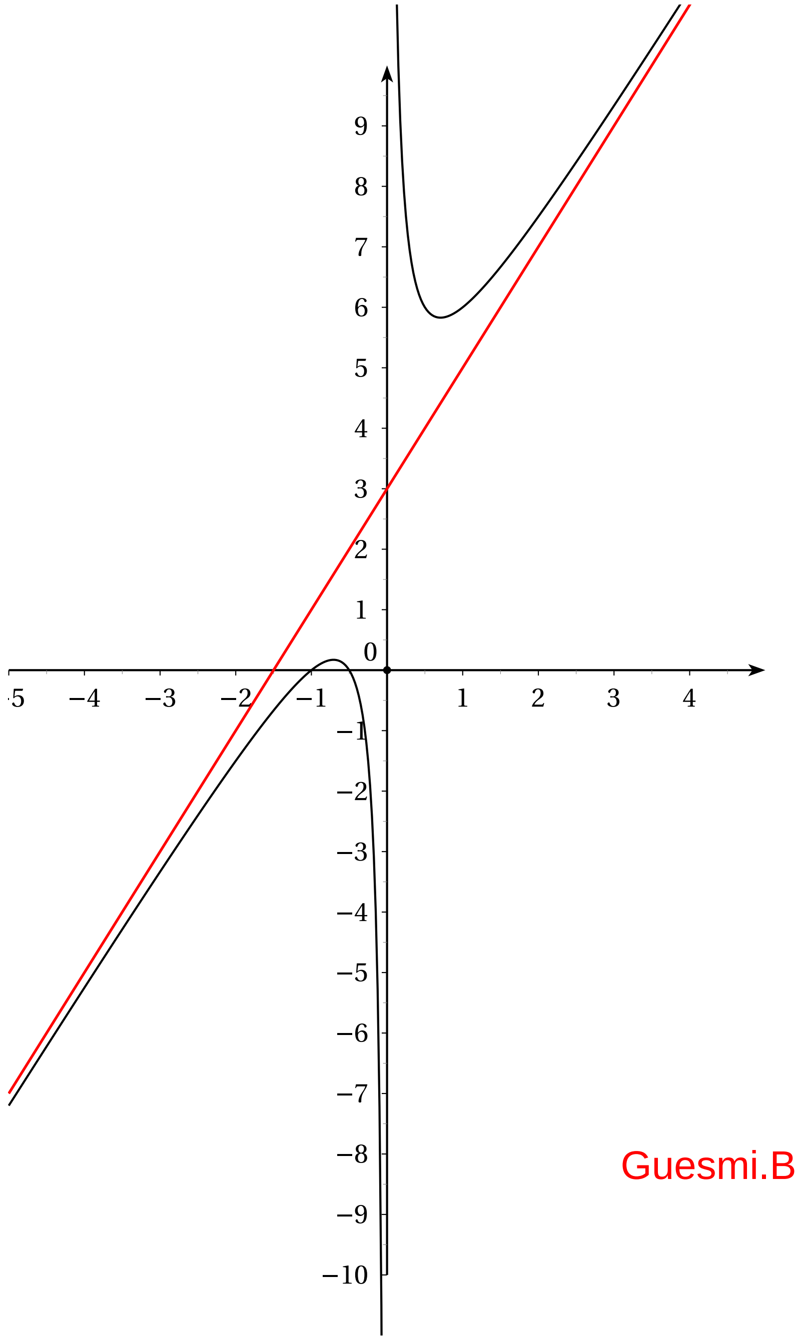
Exemple : $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{1}{x}$.

Pour tout x, on a : $f(x) - (2x + 3) = \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Par conséquent : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (2x + 3)] = 0$.

La droite d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Graphiquement, on obtient :



IV Limites et opérations algébriques

Théorème admis :

Lorsqu'elle existe, la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions est la somme, le produit ou le quotient des limites.

Les règles de calculs sur les limites sont résumées dans les trois tableaux ci-dessous :

a désigne un nombre réel, ou $-\infty$ ou $+\infty$.
ℓ et ℓ' désignent des nombres réels.

Addition ou soustraction

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $\lim\limits_{x\to g(x)} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors, $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**Forme indéterminée**

Produit

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors, $\lim\limits_{x\to a} (f\times g)(x) =$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**Forme indéterminée**

Quotient

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	ℓ'	$\pm\infty$	0	ℓ'	$\pm\infty$	0	0	$\pm\infty$
alors, $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	**Forme indéterminée**	**Forme indéterminée**

Remarque :
On parle de **forme indéterminée** lorsque l'on ne peut pas répondre directement, à partir du formulaire.
Le « jeu » consiste alors à regarder de plus près les fonctions pour « **lever** » l'indétermination et trouver tout de même la limite cherchée.
Les techniques pour lever les indéterminations seront vues dans le paragraphe suivant.

Les quatre formes indéterminées sont :

- « $\infty - \infty$ »
- « $0 \times \infty$ »
- « $\dfrac{0}{0}$ »
- « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

Guesmi.B

V Comment lever une indétermination ?

Quand on cherche une limite et que l'on arrive à une forme indéterminée, on cherche à « lever cette indétermination. ». Plusieurs techniques sont à connaître :

1) Utilisation de la forme conjuguée

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$.

On cherche la limite au voisinage de $+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+2}=+\infty$ donc on a une forme indéterminée au dénominateur du type « $\infty-\infty$ ».

On transforme alors l'expression de $f(x)$, en multipliant numératueur et dénominater par la forme conjuguée du dénominateur :

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}{\left[\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right]\left[\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right]}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}^2-\sqrt{x}^2}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}{2}$.

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right]=+\infty$ d'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$.

2) Limite d'un polynôme à l'infini

Dans le cas où le calcul de la limite à l'infini d'un polynôme donne une forme indéterminée, on factorise celui-ci par son terme de plus haut degré.

Exemple :

Soit $f(x)=4x^3-x^2+5x-8$. Les règles de calcul direct de la limite en $+\infty$ donnent une forme indéterminée.

Pour $x>0$ (possible, puisque l'on regarde ce qui se passe pour x suffisamment grand), on a :

$f(x)=x^3\left(4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{8}{x^3}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\,;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{x^2}=0\,;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{x^3}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{8}{x^3}\right)=4$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$.

3) Limite d'une fraction rationnelle à l'infini

On adapte la méthode précédente, puisque dans une fraction rationnelle, le numérateur et le dénominateur sont tous deux des polynômes.

Au numérateur, on factorise pas la puissance la plus grande et de même au dénominateur, puis, on simplifie les deux puissances factorisées.

Exemple 1

Trouver la limite en $+\infty$ de $f(x)=\dfrac{3x^2+5x-1}{x^3+2x}$.

Au numérateur, on factorise par le terme de plus haut degré et de même pour le dénominateur et l'on simplifie le quotient des puissances de x que l'on a factorisées.

On trouve, pour $x>0$: $f(x)=\dfrac{x^2\left(3+\dfrac{5}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)}=\dfrac{3+\dfrac{5}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{x\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\dfrac{5}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=3\,;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ d'où, par quotient : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$.

Guesmi.B

Exemple 2

Soit $f(x)=\dfrac{x^3+5x-1}{2x^3+x+1}$. Alors, pour $x\neq 0$, $f(x)=\dfrac{x^3\left(1+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}=\dfrac{1+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)=1 et \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)=2$, d'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\dfrac{1}{2}}$.

4) Utilisation de la dérivée d'une fonction

Exemple : Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x-1}{x-\dfrac{\pi}{2}}\right)$.

On a une forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ ».

On remarque que : $\dfrac{\sin x-1}{x-\dfrac{\pi}{2}}=\dfrac{\sin x-\sin\dfrac{\pi}{2}}{x-\dfrac{\pi}{2}}$.

D'autre part, quand f est dérivable en a, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{x-\dfrac{\pi}{2}}=\sin'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

Guesmi.B