Exercices Polygones réguliers Angles inscrits

$\boxed{1}$ Un pentagone

On veut construire ABCDE pentagone régulier de centre O tel que AB = 5 cm

a) Déterminer la mesure de $\widehat{AOB}$
b) Construire le triangle AOB
c) Construire le pentagone ABCDE.

$\boxed{2}$ ABC triangle isocèle en A et $\widehat{BAC} = 30°$

Construire le cercle circonscrit au triangle ABC
Calculer la mesure des angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{AOB}$
Démontrer que BOC est un triangle équilatéral

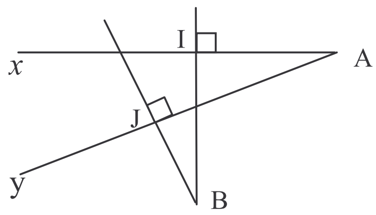
$\boxed{3}$ Soit ABC un triangle équilatéral et M un point de l'arc BC du cercle circonscrit à ABC

Quelles sont les mesures des angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{AMC}$ et $\widehat{BMC}$?

$\boxed{4}$ Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en B et M un point de l'arc AC du cercle circonscrit à ABC

Montrer que (MB) est la bissectrice de $\widehat{AMC}$

$\boxed{5}$ Angles à côtés perpendiculaires



On a
[Ax) $\perp$ [BI) et [Ay) $\perp$[BJ)

a) Montrer que A, I, B, J sont sur un cercle dont on précisera le centre
b) Démontrer que $\widehat{xAy} = \widehat{IBJ}$

$\boxed{6}$ Deux triangles isocèles

[OR] et [CD] 2 cordes parallèles du cercle $\mathfrak{C}$
[OC] et [RD] se coupent en I
Démontrer que les triangles ROI et CID sont des triangles isocèles

$\boxed{7}$ ABC est un triangle équilatéral et H le milieu de [BC]

On considère le cercle circonscrit au triangle AHC.
M est un point de l'arc AC
Quelles sont les mesures des angles $\widehat{HMC}$, $\widehat{AMH}$ et $\widehat{AMC}$?

Guesmi.B

Corrigé Exercices Polygones réguliers Angles inscrits

1 Un pentagone

Pour tout polygone régulier il existe un cercle passant par tous les sommets du polygone

A et B étant 2 sommets consécutifs d'un polygone régulier à n côtés de centre O on a $\widehat{AOB} = \dfrac{360°}{n}$

ABCDE pentagone donc $\widehat{AOB} = \dfrac{360°}{5} = 72°$

AOB est un triangle isocèle en O donc $\widehat{OBA} = \widehat{OAB}$

La somme des 3 angles d'un triangle est égale à 180°

$\widehat{AOB} + \widehat{OBA} + \widehat{OAB} = 180°$

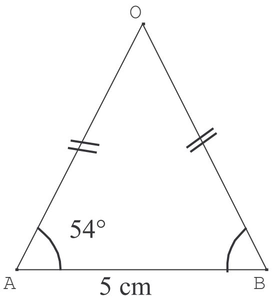
donc $72° + 2\,\widehat{OBA} = 180°$

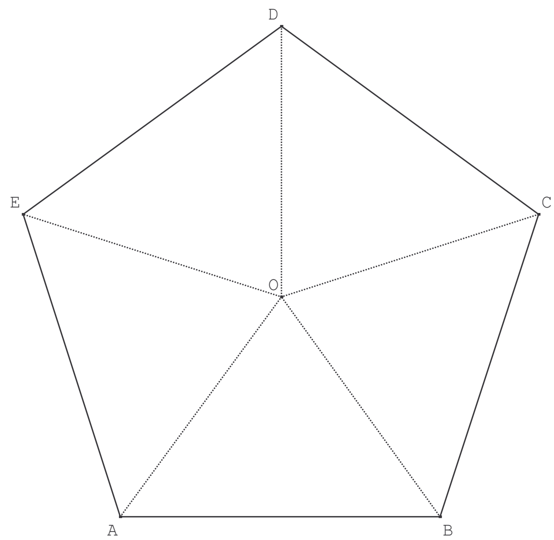
donc $2\,\widehat{OBA} = 180° - 72°$

donc $\widehat{OBA} = \dfrac{108°}{2}$

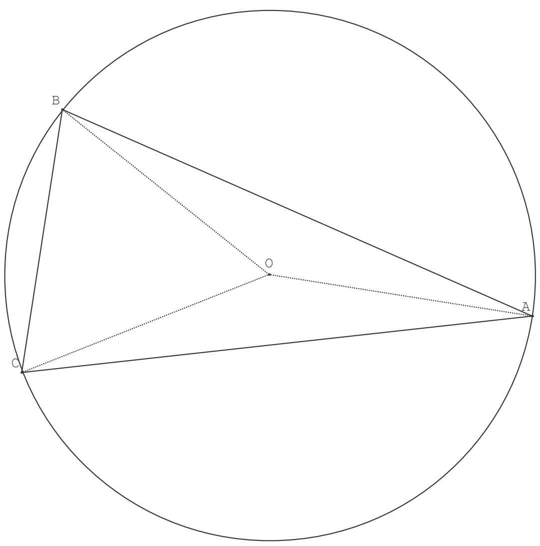
donc $\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = 54°$

On peut donc construire le triangle OAB isocèle en O avec AB = 5 cm et $\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = 54°$





2



Le centre du cercle circonscrit est le point d'intersection des médiatrices. Elles sont concourantes, il suffit d'en tracer deux.

$\widehat{BOC}$ angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{BAC}$

La mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de son angle au centre associé

donc $\widehat{BOC} = 2\,\widehat{BAC} = 2 \times 30° = 60°$

De même $\widehat{AOB}$ angle au centre associé à $\widehat{BCA}$

donc $\widehat{AOB} = 2\,\widehat{BCA}$

ABC isocèle en A donc $\widehat{ABC} = \widehat{BCA}$

La somme des 3 angles d'un triangle est égale à 180°

donc $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180°$

$30° + 2\,\widehat{BCA} = 180°$

$2\,\widehat{BCA} = 150°$

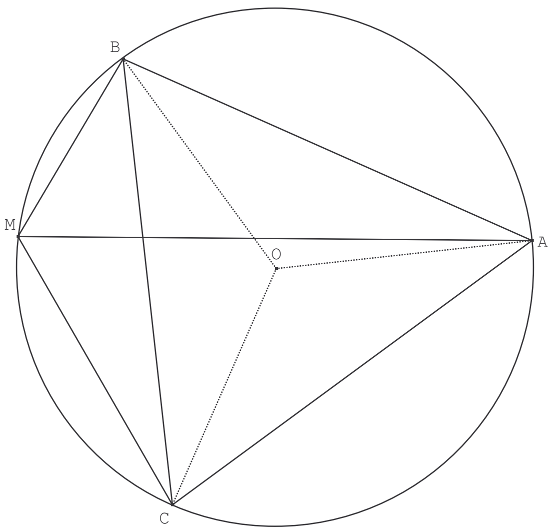
$\widehat{BCA} = 75°$

D'où $\widehat{AOB} = 2\,\widehat{BCA} = 2 \times 75° = 150°$

On a OB = OC donc BOC isocèle en O donc $\widehat{BCO} = \widehat{OBC}$

De plus $\widehat{BOC} = 60°$ donc $\widehat{BCO} = \widehat{OBC} = \widehat{BOC} = 60°$ donc BOC équilatéral.

3



Si deux angles inscrits intercepte le même arc alors ils ont la même mesure

$\widehat{AMB}$ intercepte l'arc AB et $\widehat{BCA}$ intercepte le même arc AB donc $\widehat{AMB} = \widehat{BCA}$

Or ABC équilatéral donc $\widehat{BCA} = 60°$

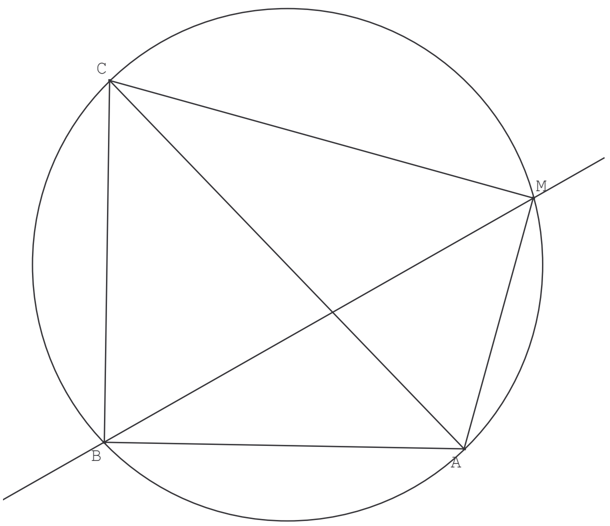
Donc $\widehat{AMB} = 60°$

De même $\widehat{AMC}$ et $\widehat{ABC}$ intercepte l'arc AC

Donc $\widehat{AMC} = \widehat{ABC} = 60°$

$\widehat{BMC} = \widehat{BMA} + \widehat{AMC} = 60° + 60° = 120°$

4



Si deux angles inscrits intercepte le même arc alors ils ont la même mesure

$\widehat{BMA}$ et $\widehat{BCA}$ intercepte le même arc BA

donc $\widehat{BMA} = \widehat{BCA}$

$\widehat{CMB}$ et $\widehat{CAB}$ intercepte le même arc CB

donc $\widehat{CMB} = \widehat{CAB}$

Or ABC isocèle en B donc $\widehat{BCA} = \widehat{CAB} = 45°$

Donc $\widehat{CMB} = \widehat{BMA} = 45°$

Donc (BM) bissectrice de $\widehat{AMC}$

5 Angles à côtés perpendiculaires

[Ax) ⊥ [BI) donc ABI rectangle en I

[Ay) ⊥[BJ) donc ABJ rectangle en J

Si un triangle est rectangle alors son cercle circonscrit a pour centre le milieu de l'hypoténuse

ABI rectangle en I donc $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit a pour centre O milieu de [AB]

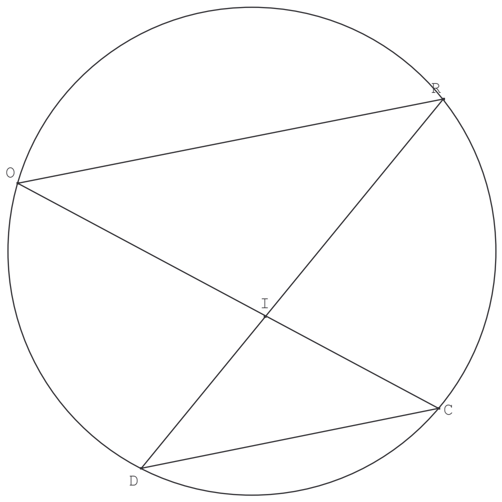
ABJ rectangle en J donc son cercle circonscrit a aussi pour centre O milieu de [AB], il passe par A et B donc c'est le même cercle que celui de ABI

A, B, I, J sont donc sur un cercle de centre O milieu de [AB]

Si deux angles inscrits intercepte le même arc alors ils ont la même mesure

$\widehat{xAy}$ et $\widehat{IBJ}$ angles inscrits dans le cercle $\mathscr{C}$ intercepte le même arc IJ donc $\widehat{xAy} = \widehat{IBJ}$

6



Si deux droites sont parallèles alors les angles alternes–internes ont la même mesure.

$\widehat{ORD}$ et $\widehat{RDC}$ alternes-internes et (OR)//(DC) donc $\widehat{ORD} = \widehat{RDC}$

Si deux angles inscrits intercepte le même arc alors ils ont la même mesure

$\widehat{ROC}$ et $\widehat{RDC}$ inscrits dans C intercepte l'arc RC

donc $\widehat{ROC} = \widehat{RDC}$

$\widehat{ROC} = \widehat{RDC}$ et $\widehat{ORD} = \widehat{RDC}$ donc $\widehat{ORD} = \widehat{ROC}$ donc $\widehat{ORI} = \widehat{ROI}$

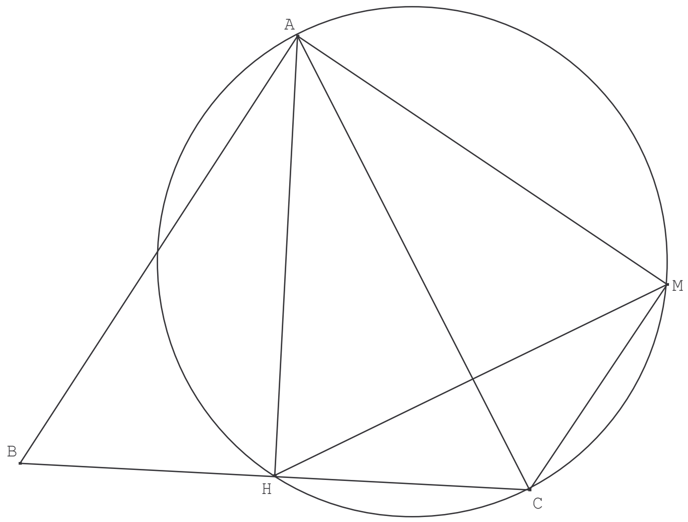
ROI a donc deux angles de même mesure donc ROI isocèle en I

De même $\widehat{OCD}$ et $\widehat{ROC}$ alternes-internes donc $\widehat{OCD} = \widehat{ROC}$

On a aussi $\widehat{ROC} = \widehat{RDC}$ donc $\widehat{OCD} = \widehat{RDC}$

donc $\widehat{ICD} = \widehat{IDC}$ donc CID isocèle en I

7



(AH) médiane dans un triangle équilatéral est aussi bissectrice de $\widehat{BAC}$

Or $\widehat{BAC} = 60°$ donc $\widehat{HAC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 30°$

Si deux angles inscrits intercepte le même arc alors ils ont la même mesure

$\widehat{HMC}$ et $\widehat{HAC}$ angles inscrits dans le cercle circonscrits à HAC interceptent le même arc HC

donc $\widehat{HMC} = \widehat{HAC} = 30°$

$\widehat{AMH}$ et $\widehat{ACB}$ interceptent le même arc AH donc

$\widehat{AMH} = \widehat{ACB} = 60°$

$\widehat{AMC} = \widehat{AMH} + \widehat{HMC} = 60° + 30° = 90°$

Guesmi.B