Théorème de l'angle inscrit. Cocyclicité. Applications

__Introduction__ : On se place dans $\wp$ plan affine euclidien orienté. On suppose connu :

- Angles orientés de vecteurs, relation de Chasles
- Pour un triangle ABC, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = \pi \ (2\pi)$

1. Théorème de l'angle inscrit :

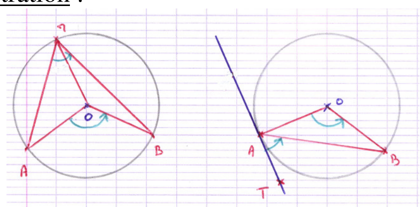
1.1 Le théorème de l'angle inscrit :

Théorème 1 : *[Théorème de l'angle inscrit]*
Soient A et B deux points distincts d'un cercle C de centre O.

i) $\forall M \in C \setminus \{A, B\}$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2\,(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \ (2\pi)$

ii) *T (distinct de A) appartient à la tangente à C en A si et seulement si* $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2\,(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}) \ (2\pi)$

__Démonstration__ :



i) Les triangles OAM et OBM sont isocèles en O, et en utilisant le deuxièmes rappel de l'introduction, on a :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}) + 2\,(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}) = \pi \ (2\pi) \\ (\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}) + 2\,(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}) = \pi \ (2\pi) \end{cases}$$

. On additionne membre à membre pour trouver que :

$$(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}) + 2\left((\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB})\right) = 2\pi \quad (2\pi)$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}) + 2\,(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = 0 \quad (2\pi)$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = 2\,(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = 0 \quad (2\pi)$$

ii) Montrons $\boxed{\Rightarrow}$

Si T (distinct de A) appartient à la tangente à C en A, alors : $2\,(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}) = 2\,(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AO}) + 2\,(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}) \quad (2\pi)$

soit $2\,(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}) = \pi + 2\,(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}) \quad (2\pi)$ puisque $(AT) \perp (AO)$

De plus le triangle OAB est isocèle en O donc $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) + 2\,(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}) = \pi \quad (2\pi)$

$$\Rightarrow 2\,(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) - \pi \quad (2\pi)$$

Il s'en suit que : $2\,(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}) = \pi + (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) - \pi \quad (2\pi)$ soit $2\,(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \quad (2\pi)$

Montrons $\boxed{\Leftarrow}$

Soit T (distinct de A) vérifiant l'égalité $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2\,(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}) \ (2\pi)$. On veut montrer que T appartient à la tangente au cercle C passant par A.
Soit T_0 (distinct de A) un point de la tangente à C en A.
Si $T = T_0$ alors T est sur la tangente à C en A et c'est terminé.

Guesmi.B

Sinon, d'après le premier sens T_0 vérifie l'égalité $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2\,(\overrightarrow{AT_0}, \overrightarrow{AB})\ (2\pi)$.

Par suite, $2\left((\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{AT_0}, \overrightarrow{AB})\right) = 0 \quad (2\pi)$

$\Rightarrow\ (\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{AT_0}, \overrightarrow{AB}) = 0\ (\pi)$

$\Rightarrow\ (\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AT_0}) = 0\ (\pi)$

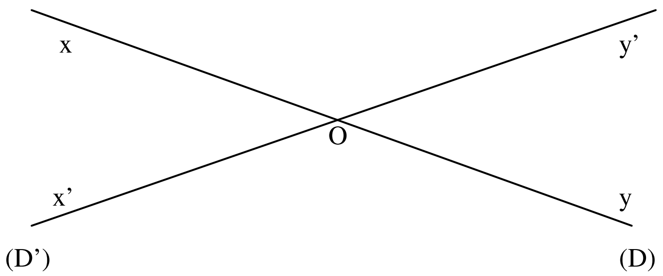
$\Rightarrow$ Les points A, T, T_0 sont alignés

$\Rightarrow$ T appartient à la tangente au cercle C passant par A.

On déduit de ce théorème le corollaire suivant :

Corollaire 1 : Soient A, B et M trois points distincts d'un cercle C de centre O et T un point (distinct de A) de la tangente à c passant par A.. On a alors que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\ (\pi)$ ce qui correspond à l'égalité des angles orientés de droites : l'angle orienté entre les droites (AT) et (AB) est le même que l'angle orienté entre les droites (MA) et (MB) modulo (π)

Remarque : Un angle orienté entre 2 droites se définit modulo π car on peut considéré 2 angles :



$(\widehat{Oy, Oy'}) = (\widehat{Ox, Oy'}) + \pi\ (2\pi)$ et c'est pour cela qu'un angle orienté de droite se définit à π près

$(\widehat{D, D'}) = \alpha\ (\pi)$ où α est une mesure d'un des angles de demi-droites définis par D et D'

*Définition 1 : Avec les notations du théorème 1, on dit que l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est **inscrit** dans le cercle C, et que l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est **l'angle au centre** correspondant.*

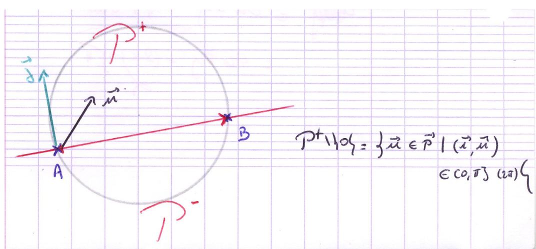
Dans un cercle, l'angle au centre vaut ainsi le double de l'angle inscrit correspondant.

1.2 Arcs interceptés :

*Définition 2 : Si $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est un angle inscrit dans un cercle, on dit que cet angle inscrit intercepte **l'arc orienté** $\overset{\frown}{AB}$ d'origine A qui ne passe pas par M.*

Définition 3 : Soit C cercle de centre O, orienté par une orientation du plan.
La mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ est le réel $\alpha \in]-2\pi, 2\pi[$ qui est une mesure, de même signe que l'arc, de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. On écrit mes $\overset{\frown}{AB} = \alpha$
La mesure géométrique d'un arc est la valeur absolue de l'un (quelconque) des arcs orientés associés, elle appartient à $[0, 2\pi[$.

$\overset{\frown}{AB}$ est dit un arc positif s'il est dans le ½ plan négatif déterminé par l'axe (AB) orienté par $\overrightarrow{AB}$.



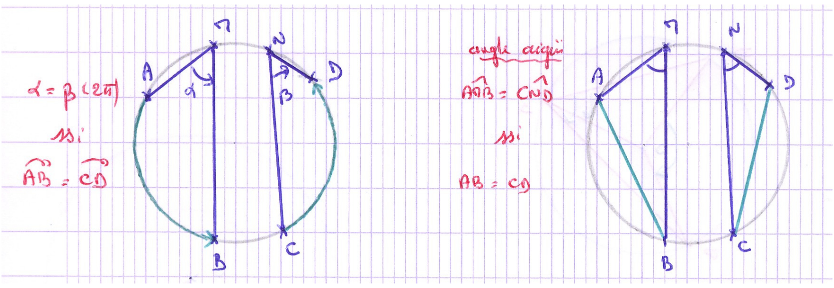
Guesmi.B

Théorème 2 : *[Théorème de l'arc intercepté]*

Dans le plan euclidien orienté, pour tout angle inscrit $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$ *qui intercepte l'arc orienté* $\overset{\frown}{AB}$ *on a :*

$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \frac{1}{2} mes \quad (2\pi)$.

Deux angles inscrits sont égaux en tant qu'angles orientés de vecteurs si et seulement si ils interceptent deux arcs orientés de même mesure. Ils sont égaux en tant qu'angles géométriques si et seulement si ils interceptent deux cordes égales et sont tous les deux aigus ou tous les deux obtus.



<u>Démonstration</u> : Soit $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ un angle inscrit dans un cercle C de centre O. On suppose que cet angle a une mesure principale $\alpha \in \,]0, \pi[$ (i.e. l'angle est positif). On a $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 2\alpha \ (2\pi)$ par le théorème de l'angle inscrit. Or $2\alpha \in \,]0, 2\pi[$, c'est donc la mesure le l'arc orienté positif $\overset{\frown}{AB}$. Ainsi $\alpha = \frac{1}{2}$ mes $\overset{\frown}{AB}$ et

$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{1}{2}$ mes $\overset{\frown}{AB} \quad (2\pi)$.

Il reste à vérifier que cet arc positif $\overset{\frown}{AB}$ est bien l'arc intercepté. Il faut donc montrer que l'arc intercepté par un angle inscrit positif est un arc positif (i.e. un arc situé dans le ½ plan négatif).

Dans le triangle MAB, les angles orientés $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ sont de même sens (sens direct ici) et cela entraîne que M est dans le ½ plan positif délimité par l'axe (AB) dirigé par $\overrightarrow{AB}$.
Or l'arc intercepté est par définition, l'arc $\overset{\frown}{AB}$ situé dans l'autre ½ plan, celui qui ne contient pas M et qui est donc dans le ½ plan négatif : c'est bien par définition des arcs orientés l'arc positif $\overset{\frown}{AB}$.

On raisonne de même façon si la mesure principale de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est dans $]-\pi, 0[$

Pour la dernière partie du théorème, on utilise l'équivalence $AB = CD \Leftrightarrow \widehat{AOB} = \widehat{COD}$ (facile à vérifier)

Par le théorème de l'angle inscrit on a $\widehat{AMB} = \widehat{CND}$.

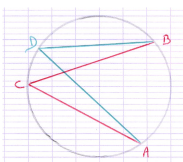
2. Cocyclicité :

Définition 4 : *On dit que N points du plan sont cocycliques s'il existe un cercle passant par ces N points.*

<u>Remarque</u> : Pour N = 2 c'est facile : si A et B sont 2 points, tracer le cercle de diamètre [AB]
Pour N = 3 c'est aussi facile : Si A, B, C sont trois points non alignés, On note O l'intersection des 3 médiatrices et on trace le cercle de centre O et de rayon OA : c'est le cercle circonscrit au triangle ABC.
Pour N = 4, ça se complique…

Théorème 3 : *Quatre points distincts du plan A, B, C et D sont alignés ou cocycliques si et seulement si on a*

$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \quad (\pi)$



Démonstration : $\boxed{\Rightarrow}$ Si A, B, C et D sont alignés alors $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}) = 0 \quad (\pi)$. c'est ok

Si A, B, C et D sont cocycliques, le théorème de l'angle inscrit entraîne que $2(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = 2(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \quad (2\pi)$

D'où $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}) \quad (\pi)$

$\boxed{\Leftarrow}$ réciproquement, si on suppose avoir $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}) \quad (\pi)$

A, B, C alignés $\Leftrightarrow$ A, B, D alignés car cela correspond à la nullité de ces 2 angles modulo π

$\Leftrightarrow$ A, B, C et D sont alignés.

En revanche si A, B et C ne sont pas alignés alors il en va de même pour les points A, B et D. Donc il existe deux cercles Γ et Γ' respectivement circonscrits au triangle ABC et au triangle ABD.

Si T (resp. T') est un point de la tangente à Γ (resp. Γ') en A et différent de A, le corollaire 1 donne :

$(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) \quad (\pi)$ (resp. $(\overrightarrow{AT'},\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}) \quad (\pi)$) d'où en utilisant l'hypothèse :

$$(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AT'},\overrightarrow{AB}) \quad (\pi)$$

et donc (AT) = (AT').

Les cercles Γ et Γ' passent tous les 2 par les points A et B et ont le même tangente en A $\Rightarrow$ ils sont confondus et alors les 4 points A, B, C et D sont sur le même cercle.

On peut traduire ce théorème en terme d'affixe :

Théorème 4 : *Quatre points distincts A, B, C, D d'affixes respectives a, b, c, d sont alignés ou cocycliques si et seulement si* $\frac{b-c}{a-c} \times \frac{b-d}{a-d} \in \mathbb{R}^*$.

Démonstration : A, B , C, D cocycliques ou alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}) \quad (\pi)$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \arg\left(\frac{b-d}{a-d}\right) \quad (\pi)$

$\Leftrightarrow \arg\left(\left(\frac{b-c}{a-c}\right) : \left(\frac{b-d}{a-d}\right)\right) = 0 \quad (\pi)$

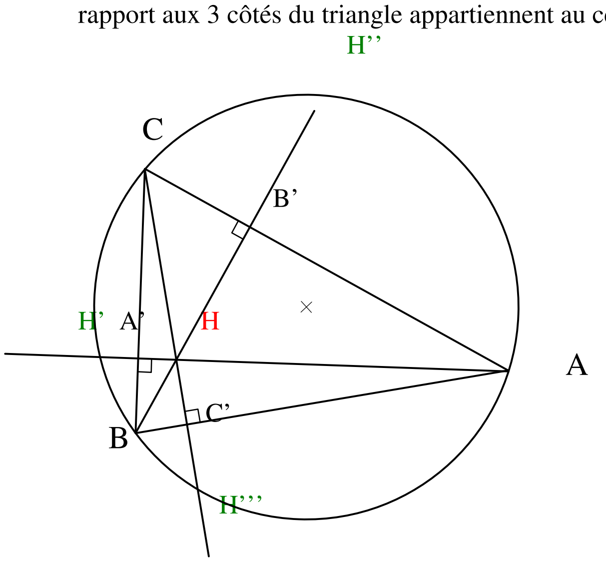
$\Leftrightarrow \left(\frac{b-c}{a-c}\right) : \left(\frac{b-d}{a-d}\right) \in \mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow \frac{b-c}{a-c} \times \frac{b-d}{a-d} \in \mathbb{R}^*$.

3. Applications :

3.1 Symétriques de l'orthocentre d'un triangle :

Exercice : On considère ABC un triangle non aplati. Montrer que les symétriques de l'orthocentre du triangle ABC par rapport aux 3 côtés du triangle appartiennent au cercle circonscrit du triangle.



On note A' le pied de la hauteur issue de A.
B' le pied de la hauteur issue de B.
C' le pied de la hauteur issue de C.
H' le symétrique de H par rapport à (BC)
H'' le symétrique de H par rapport à (AC)
H''' le symétrique de H par rapport à (AB)

On veut montrer que A, B, C et H' sont cocyclique

i.e. on veut montrer que $(\overrightarrow{H'B},\overrightarrow{H'C}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \quad (\pi)$

<u>Montrons en préambule le résultat suivant</u> :
Soient ABC un triangle rectangle en B et ADC un triangle rectangle en D.
Alors les points A, B, C et D sont cocycliques. ($)

En effet, $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})\ (\pi)$

$(\overrightarrow{H'B},\overrightarrow{H'C}) = (\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HB})\ \ (2\pi)$ car une réflexion renverse les angles orientés.

$= (\overrightarrow{HC'},\overrightarrow{HB'})\ \ (2\pi)$ angles opposés par rapport au sommet

Or les points H, C', A, B' sont cocycliques car AC'H est rectangle en C' et AB'H est rectangle en B'.

On a ainsi $(\overrightarrow{HC'},\overrightarrow{HB'}) = (\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{AB'})\ \ (\pi)$

Ainsi, $(\overrightarrow{H'B},\overrightarrow{H'C}) = (\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{AB'})\ \ (\pi)$

$= (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\ \ (\pi)$

Et on a bien que les points H', B, A, C sont cocycliques et donc H' appartient au cercle circonscrit du triangle ABC.

On peut faire le même raisonnement pour H'' et H'''.

3.2 Droite de Simson :

<u>Exercice</u> : On considère un triangle ABC non aplati et Γ son cercle circonscrit. Soit M un point du plan, on note :
P le projeté orthogonal de M sur (BC)
Q le projeté orthogonal de M sur (AC)
R le projeté orthogonal de M sur (AB)
Alors M ∈ Γ si et seulement si les points P, Q et R sont alignés.

Définition 5 : *La droite (PQ) (=(PR) = (QR)) obtenue s'appelle la* ***droite de Simson*** *de M relative au triangle ABC*

<u>Résolution de l'exercice</u> :

Si M ∈ {A, B, C} le résultat est trivial car 2 des points P, Q et R sont confondus avec l'un des 3 points A, B, C.

Supposons M ∉ {A, B, C}.
Le triangle MCP est rectangle en P et le triangle MCQ est rectangle en Q ainsi par le résultat ($) on a que les points M, P, Q, C sont cocycliques $\Rightarrow (\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PM}) = (\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{CM})\ \ (\pi)$
De même les points M, B, P, R sont cocycliques (par le même argument avec les triangles RBM rectangle en R et PBM rectangle en P) $\Rightarrow (\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PR}) = (\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BR})\ \ (\pi)$

Il s'en suit que :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}) &= (\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PM}) + (\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PR})\ \ (2\pi)\\ &= (\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{CM}) + (\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BR})\ \ (\pi)\\ &= (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}) + (\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA})\ \ (\pi)\end{aligned}$$

P, Q, R alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}) = 0\ \ (\pi) \Leftrightarrow (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}) + (\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}) = 0\ \ (\pi) \Leftrightarrow (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}) = (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM})\ \ (\pi)$
⇔ les points A, B, C, M sont cocycliques
⇔ M ∈ Γ.

Guesmi.B